MAXWELL-THEORIE

B.R.A. Nijboer

1972

FYSISCH LABORATORIUM
RIJKSUNIVERSITEIT

Maxwell-theorie

College gegeven voorjaar 1972, Rijksuniversiteit Utrecht,
door B.R.A. Nijboer.

Leerboeken:

R. Becker, Theorie der Elektrizität, 2 dln., Teubner,
Bd I, 10^e Aufl. 1933.
Bd II, 6^e Aufl. 1933.

Dit klassieke leerboek werd later geheel nieuw bewerkt door F. Sauter:

R. Becker und F. Sauter, Theorie der Elektrizität, 3 dln., Teubner, 1962 - 63 - 68.

P. Lorrain and D. Corson, Electromagnetic fields and waves, Freeman, 1970.

J.D. Jackson, Classical electrodynamics, John Wiley, 1962.

W.K.H. Panofsky and M. Phillips, Classical electricity and magnetism, Addison-Wesley, 2nd ed., 1962.

Voorts bepaalde delen uit de series leerboeken der theoretische fysica van

A. Sommerfeld, van L. Landau en E.M. Lifshitz, van B.G. Levich, etc.

Elektromagnetische eigenschappen der materie o.a. in:

L. Rosenfeld, Theory of electrons, Noordhollandse Uitg. Mij, 1951.

Elektromagnetische lichttheorie in:

M. Born, Optik, Springer 1933.

M. Born and E. Wolf, Principles of optics, Acad.Press 1959.

Hoofdstuk I Inleiding over vektorvelden.

1. Vektoranalyse.

De zaken die in dit college behandeld worden -en dit geldt ook in het bijzonder voor dit inleidende hoofdstuk- zijn voor een belangrijk deel al in eerdere colleges over elektriciteit en magnetisme, over tensoren, over Lorentz-invariantie ter sprake geweest. Wel is waar gaan we hier en daar wat verder, maar daarvan afgezien leert de ervaring dat voor een moeilijk onderwerp als elektromagnetisme een soort tweede ronde geenszins een overbodige herhaling betekent.

Ten einde de wisselwerking tussen elektrisch geladen deeltjes te beschrijven voert men zoals bekend twee vektorvelden in, nl. het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ met de 3 cartesiaanse componenten $E_x(x,y,z,t)$, $E_y(\ \ )$, $E_z(\ \ )$ en het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r},t)$ met componenten $B_x(\ \ )$, $B_y(\ \ )$ en $B_z(\ \ )$.

In dit inleidende hoofdstuk zullen we nu eerst iets bespreken over de wiskundige beschrijving van deze (en andere) velden. De hier voorkomende begrippen zijn veelal ontwikkeld in de hydrodynamica. Bij een vektorveld kunnen we bv. denken aan de snelheidsvektor van een volumeëlementje in een stromende vloeistof. Hydrodynamische analogieën speelden in de oudere Maxwell-theorie een grote rol.

We beschouwen veldgrootheden, dat zijn grootheden die in ieder punt van een zeker gebied in de ruimte een bepaalde waarde hebben, die nog van de tijd kan afhangen.
We onderscheiden:

Skalair-veld: $\varphi(\vec{r},t)$. Een grootheid die bij draaiing van het coördinatenstelsel niet transformeert. Als $x_i' = \sum_k a_{ik}x_k$ $(i,k = 1,2,3,$ a_{ik} is een orthogonale matrix) is $\varphi'(\vec{r}\,') = \varphi(\vec{r})$. ($\vec{r} = x_1,x_2,x_3$ en $\vec{r}\,' = x_1',x_2',x_3'$ stellen hetzelfde punt voor in verschillende coördinatenstelsels). Voorbeeld: de dichtheid van een vloeistof, de elektrostatische potentiaal.

Vektor-veld: $\vec{v}(\vec{r},t)$ met 3 componenten die bij draaiing van het coördinatenstelsel als een vektor (dwz. net als de coördinaten) transformeren.

Dus: $v_i'(\vec{r}\,',t) = \sum_k a_{ik}v_k(\vec{r},t)$. Voorbeeld: snelheidsvektor bij vloeistofstroming, elektrische veldsterkte.

<u>Tensorveld</u>: $\vec{T}(\vec{r},t)$ met 9 componenten T_{ik} (tensor van de 2^e trap).
Deze componenten transformeren als:

$$T'_{ij}(\vec{r}',t) = \sum_k \sum_\ell a_{ik} a_{j\ell} T_{k\ell}(\vec{r},t).$$

Voorbeeld: spanningstensor in elastisch medium. Bijzonder geval: $T_{ik} = v_i w_k$, waarin $\vec{v}$ en $\vec{w}$ vektoren zijn.

Uit een <u>skalair</u> veld kan men een <u>vektorveld</u> afleiden door differentiatie: nl.

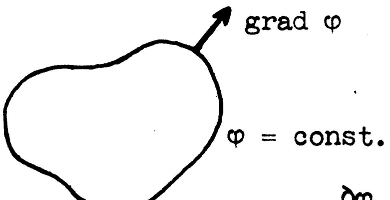
grad φ met componenten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.
De gradient is inderdaad een vektorveld, want bij een orthogonale transformatie $x'_i = \sum_k a_{ik} x_k$ (waaruit volgt: $x_k = \sum_i a_{ik} x'_i$) krijgen we

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} = \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_k a_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k},$$ dus een transformatie als een vektor.

Door nog eens te differentiëren ontstaat een tensorveld: $T_{ik} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}$.
Men voert in de symbolische vektor: nabla $\vec{\nabla}$ met componenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ en schrijft vaak:

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla}\varphi .$$

De gradient is een vektor die loodrecht staat op de oppervlakken $\varphi(x,y,z)$ = constant. Verder zien we dat de verandering van φ in de richting $\vec{ds}$ gegeven wordt door:



$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot \vec{ds}.$$

Omgekeerd kan men uit een vektorveld door differentiatie een skalair veld afleiden:

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}.$$

Laat expliciet zien dat dit een skalair veld is.
Eveneens door differentiatie van een vektorveld een ander vektorveld:

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}.$$

In de Engelse literatuur heet rotatie curl. Zoals ieder vektorproduct is de rotatie een zg. axiale of pseudovektor, dwz. bij een echte draaiing (met det $a_{ik} = +1$) transformeert hij als een gewone of polaire vektor, maar bij een spiegeling (det $a_{ik} = -1$) veranderen de componenten niet van teken, zoals bij een polaire vektor.

Men controleert gemakkelijk:

rot grad $\varphi \left(= \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi\right) = 0$. Een gradient heeft rotatie nul, is wervelvrij, of is zg. longitudinaal.

div rot $\vec{v} \left(= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})\right) = 0$. De rotatie van een vektor is altijd divergentievrij, of solenoidaal of transversaal.

Ook omgekeerd geldt:

Als de rotatie van een vektor overal in een enkelvoudig samenhangend gebied nul is, is de vektor te schrijven als de gradient van een skalair veld (potentiaal).

Stel rot $\vec{v} \equiv 0$, kies maar $\varphi(\vec{r}) = \int_0^{\vec{r}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$, met willekeurig beginpunt O.

Zoals we nog zullen zien is deze integraal onafhankelijk van de gekozen weg (omdat rot $\vec{v} \equiv 0$). Nu zal inderdaad $d\varphi = \vec{v} \cdot d\vec{s}$, dwz. $\vec{v} = \text{grad}\ \varphi$.

Eveneens: Als de divergentie van een vektor identiek nul is, kan men deze vektor schrijven als de rotatie van een andere vektor.

Stel maar div $\vec{v} = 0$. Kies nu maar:

$$w_x(x,y,z) = \int_{z_0}^{z} v_y(x,y,z')\,dz' - \int_{y_0}^{y} v_z(x,y',z_0)\,dy'$$

$$w_y(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z} v_x(x,y,z')\,dz'$$

$$w_z(x,y,z) = 0.$$

Laat door berekening zien dat nu inderdaad $\vec{v}(x,y,z) = \text{rot}\ \vec{w}(x,y,z)$.

Uiteraard mag men bij $\vec{w}$ nog altijd een willekeurige grad φ optellen.

Ter recapitulatie herinner ik aan enkele veel toegepaste stellingen uit de vektoranalyse:

1°: rot rot $\vec{v}$ = grad div $\vec{v} - \nabla^2\vec{v}$, of geschreven met nablas:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}.$$

Hierin is $\nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, de zg. operator van Laplace.

2°. De stelling van Gauss, waarmee een volumeintegraal over een gesloten gebied geschreven kan worden als een oppervlakteintegraal over de begrenzing van dat gebied.

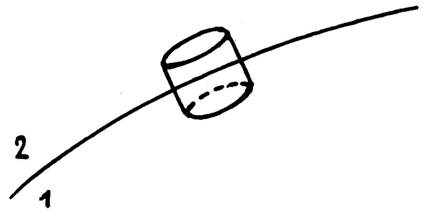
$$\int_V \mathrm{div}\, \vec{v}\, d\vec{r} = \oint \vec{v}\cdot d\vec{o} = \oint v_n do .$$

Hierin is $\vec{n}$ de normaal naar buiten op het oppervlakte-element do. Hieruit volgt dat men de divergentie ook kan definiëren als:

$$\mathrm{div}\, \vec{v} = \lim_{\Delta V \to o} \frac{1}{\Delta V} \oint \vec{v}\cdot d\vec{o}$$

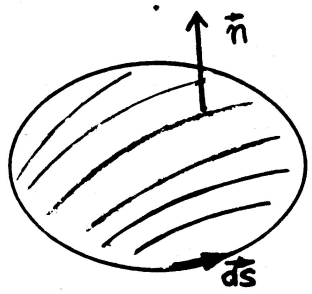
waarbij de oppervlakteintegraal uitgestrekt wordt over het oppervlak van het (oneindig) kleine gebiedje ΔV. Als $\vec{v}$ de snelheidsvektor bij een vloeistofstroming voorstelt, dan is in bovenstaande uitdrukking $\oint \vec{v}\cdot d\vec{o}$ de hoeveelheid per sec door het oppervlak naar buiten stromende vloeistof. Dit is van nul verschillend als div $\vec{v}$ in het volumeelement van nul verschilt, m.a.w. als er een bron binnen het volumeelement ligt. div $\vec{v}$ is de bronsterkte. Dit verklaart ook de naam divergentie (van stroomlijnen).

Stel eens dat $\vec{v}$ een bronvrij vektorveld is: div $\vec{v} \equiv 0$ of $\oint v_n do = 0$ voor elk gesloten oppervlak. De laatste voorwaarde is nog iets algemener dan de eerste, hij kan nl. ook worden toegepast op een discontinuïteitsvlak in het vektorveld, bv. een grensvlak tussen twee media, waar div $\vec{v}$ geen betekenis heeft. Bekijk maar een platte doos langs het grensvlak. Als ook hiervoor geldt $\oint v_n do = 0$, leidt dit tot de continuïteit van v_n langs het grensvlak. Immers bij een zeer platte kleine doos leidt de genoemde voorwaarde tot $v_{n1} + v_{n2} = 0$ waarin op beide oppervlakjes de normaal naar buiten wordt genomen. Bij een vaste richting van de normaal betekent dit v_n continu.



3°. De stelling van Stokes, waarmee een integraal over een niet-gesloten stuk oppervlak wordt omgezet in een lijnintegraal langs de begrenzing ervan.

$$\int \text{rot}\ \vec{v}\cdot d\vec{o} = \oint \vec{v}\cdot d\vec{s}.$$



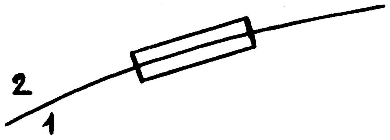
Hierbij dienen de richting van de normaal op het oppervlak en de omlooprichting $d\vec{s}$ zo gekozen te worden dat ze bij elkaar passen (rechtse schroef).

Kiest men een ander oppervlak door dezelfde begrenzing dan is het linkerlid even groot. Dit volgt uit Gauss, immers div rot $\vec{v} = 0$ en dus is $\oint$ rot $\vec{v}\cdot d\vec{o} = 0$ over een <u>gesloten</u> oppervlak.

Voor een wervelvrije vektor (rot v ≡ 0) is de lijnintegraal langs een gesloten kromme nul. Voor zo'n vektor is dus $\int_1^2 \vec{v}\cdot d\vec{s}$ onafhankelijk van de tussen 1 en 2 gekozen weg, zoals op p.4 reeds vermeld.

Stelt $\vec{v}$ weer de snelheidsvektor bij een stromende vloeistof voor, dan bepaalt $\oint \vec{v}\cdot d\vec{s}$ de werveling van de vloeistof.

Stel eens dat $\vec{v}$ een wervelvrij vektorveld voorstelt: rot $\vec{v} \equiv 0$ of $\oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = 0$ langs elke gesloten kromme. In het geval van een discontinuïteitsvlak kiezen we als integratieweg een rechthoekje met zeer korte opstaande zijden loodrecht op het grensvlak. Als hier ook $\oint \vec{v}\cdot d\vec{s} = 0$ geldt, betekent dit dat de tangentiële component van $\vec{v}$ continu is aan het grensvlak (ga dit na).



4°. Men verifiëre door narekenen:

$$\text{rot}\ \varphi\vec{v} = \text{grad}\ \varphi \wedge \vec{v} + \varphi\ \text{rot}\ \vec{v}$$

$$\text{div}\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}\cdot\text{rot}\ \vec{v} - \vec{v}\cdot\text{rot}\ \vec{w}$$

$$\text{rot}\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{w}\cdot\text{grad})\ \vec{v} - (\vec{v}\cdot\text{grad})\ \vec{w} + \vec{v}\ \text{div}\ \vec{w} - \vec{w}\ \text{div}\ \vec{v}.$$

5°. De stelling van Green.

Als $\vec{v} = \varphi\vec{w}$, dan is $\text{div}\,\vec{v} = \varphi\,\text{div}\,\vec{w} + \text{grad}\,\varphi\cdot\vec{w}$. Laat nu $\vec{v} = \varphi\,\text{grad}\,\psi$, waarin φ en ψ twee skalaire functies zijn. Dan is $\text{div}\,\vec{v} = \varphi\Delta\psi + \text{grad}\,\varphi\cdot\text{grad}\,\psi$, omdat div grad = Δ. Volgens Gauss is dan voor een gesloten oppervlak:

$$\int (\varphi\Delta\psi + \text{grad}\,\varphi\cdot\text{grad}\,\psi)d\vec{r} = \oint \varphi\,\text{grad}\,\psi\cdot d\vec{o} = \oint \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}do \qquad \text{(Green' I)}$$

We kunnen deze formule ook neerschrijven met φ en ψ verwisseld. Trekken we ze dan van elkaar af, dan vinden we:

$$\int (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,d\vec{r} = \oint \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)do \qquad \text{(Green II)}$$

Nemen we in de voorlaatste formule eens speciaal $\psi = \varphi$ en laat bovendien φ voldoen aan de vergelijking van Laplace: $\Delta\varphi = 0$. Dan hebben we:

$$\int (\text{grad}\,\varphi)^2\,d\vec{r} = \oint \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}do.$$

Hieruit volgt nu dat de oplossing van $\Delta\varphi = 0$ binnen een gesloten oppervlak eenduidig is als de waarden van φ op het begrenzend oppervlak voorgeschreven zijn (probleem van Dirichlet). Waren er nl. twee verschillende oplossingen φ_1 en φ_2, dan kunnen we bovenstaande vergelijking toepassen op het verschil $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Dit zou nul zijn op de begrenzing. Dan moet overal binnen het oppervlak grad $\varphi = 0$, dus φ constant en wel nul omdat φ nul is op de rand.

Evenzo volgt dat de oplossing van $\Delta\varphi = 0$ binnen een gesloten oppervlak op een additieve constante na bepaald is als de waarden van $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ op de begrenzing voorgeschreven zijn (probleem van Neumann). grad φ is dan eenduidig bepaald.

2. Berekening van een vektorveld als de bronnen en wervels gegeven zijn.

Laat gegeven zijn: $\operatorname{div} \vec{v} = s(x,y,z)$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{c}(x,y,z) .$$

Hierin is $\vec{c}(x,y,z)$ een vektorveld, waarvoor noodzakelijkerwijs moet gelden: $\operatorname{div} \vec{c} = 0$. Als deze relaties gelden in een eindig gebied van enkelvoudige samenhang, dan bewijst men (net als boven door het verschil van 2 mogelijke oplossingen te beschouwen) dat het vektorveld eenduidig bepaald is als v_n op de begrenzing is voorgeschreven.

We onderzoeken nu het vektorveld $\vec{v}$, dat overal in de oneindige ruimte aan bovenstaande relaties voldoet, waarbij we echter voor het gemak zullen onderstellen dat s en $\vec{c}$ slechts van nul verschillen in een begrensd deel van de ruimte. We zullen nu eerst aantonen dat de oplossing $\vec{v}$ eenduidig is, als we de eis stellen dat $|\vec{v}|$ in het oneindige snel genoeg naar nul gaat (nl. minstens als $r^{-\frac{3}{2}-\epsilon}$ met $\epsilon > 0$, dus bv. als r^{-2}) en vervolgens zullen we die oplossing aangeven.

Stel weer dat er twee verschillende oplossingen waren $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Voor $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ geldt dan: $\operatorname{div} \vec{w} = 0$ en $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$. Er is dan een skalaire functie (potentiaal) φ, zodat $\vec{w} = -\operatorname{grad} \varphi$. Dan moet $\Delta\varphi = 0$. Dan zal weer net als vroeger:

$$\int (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\vec{r} = \oint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, do$$

voor ieder gesloten oppervlak. Laten we vervolgens het begrenzend oppervlak naar oneindig gaan. Uit de onderstelling die gemaakt werd over het gedrag van $|\vec{v}|$ in het oneindige volgt dan dat het rechterlid naar nul gaat. Dan moet overal $\vec{w} = -\operatorname{grad} \varphi$ gelijk zijn aan nul.

We splitsen nu $\vec{v}$ in een wervelvrij (longitudinaal) en een divergentievrij (transversaal) stuk, dwz. we schrijven: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ met

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = s \qquad \text{en} \qquad \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}_1 = 0 \qquad\qquad \operatorname{rot} \vec{v}_2 = \vec{c} .$$

Uit het voorgaande volgt dat deze splitsing eenduidig is.

We bepalen eerst $\vec{v}_1$. Er is een potentiaalfunctie φ, zodat $\vec{v}_1 = -\text{grad}\ \varphi$.

Dan voldoet φ aan $\Delta\varphi = -s$, de zg. vergelijking van Poisson.

Ter oplossing bekijken we eerst de vergelijking van Poisson met een δ-functie als bronterm, dus

$$\Delta G = -\delta(\vec{r}).$$

G heet de functie van Green behorende bij de vergelijking van Poisson. Deze vergelijking lossen we op met behulp van Fouriertransformatie, dwz. we stellen

$$G(\vec{r}) = \int \hat{G}(\vec{k})\ e^{2\pi i\vec{k}.\vec{r}}\ d\vec{k}.$$

Dan is

$$\Delta G(\vec{r}) = -4\pi^2 \int k^2\ \hat{G}(\vec{k})\ e^{2\pi i\vec{k}.\vec{r}}\ d\vec{k}.$$

Anderzijds weten we dat:

$$\delta(\vec{r}) = \int e^{2\pi i\vec{k}.\vec{r}}\ d\vec{k}.$$

Onze vgl. voor $G(\vec{r})$ gaat derhalve na Fouriertransformatie over in

$$\hat{G}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi^2 k^2}\ .$$

Nu moeten we terugtransformeren:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{1}{k^2}\ e^{2\pi i\vec{k}.\vec{r}}\ d\vec{k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk \int_0^\pi e^{2\pi ikr\cos\theta}\ \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi kr}{k}\ dk = \frac{1}{4\pi r}\ .$$

We hebben zo gevonden dat

$$\Delta(\tfrac{1}{r}) = -\ 4\pi\delta(\vec{r}).$$

Bij de oplossing $\frac{1}{r}$ mogen we nog een willekeurige oplossing van $\Delta G = 0$ optellen, maar die is identiek nul als hij in het oneindige snel genoeg naar nul moet gaan. We zien nu ook dat

$$\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

en daar we $s(\vec{r})$ kunnen schrijven als $s(\vec{r}) = \int s(\vec{r}\,')\ \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\ d\vec{r}\,'$,

vinden we als oplossing van de vgl. van Poisson: $\Delta\varphi = -s$,

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d\vec{r}\,'$$

en dus

$$\vec{v}_1(\vec{r}) = - \text{grad}\, \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int s(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, d\vec{r}\,'.$$

(In het college tensor-rekening werd dit resultaat op een beetje andere manier afgeleid.)

Vervolgens bepalen we $\vec{v}_2$: $\text{div}\, \vec{v}_2 = 0$, $\text{rot}\, \vec{v}_2 = \vec{c}$ waarbij $\text{div}\, \vec{c} = 0$.

Daar $\text{div}\, \vec{v}_2 = 0$ kunnen we een zg. vektorpotentiaal $\vec{A}$ invoeren, zodat overal

$$\vec{v}_2 = \text{rot}\, \vec{A}. \qquad (\text{vgl. } §1)$$

$\vec{A}$ is hierdoor niet vastgelegd; we eisen bovendien dat $\text{div}\, \vec{A} = 0$.

Dan voldoet $\vec{A}$ aan:

$$\text{rot}\, \vec{v}_2 = \text{rot rot}\, \vec{A} = \text{grad div}\, \vec{A} - \Delta\vec{A} = - \Delta\vec{A} = \vec{c},$$

dwz. elk der componenten van $\vec{A}$ is de oplossing van een vergelijking van Poisson, dus

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d\vec{r}\,' .$$

[We moeten nog verifiëren dat inderdaad $\text{div}\, \vec{A} = 0$.

$$\text{div}\, \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \text{div}_r \left\{\frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} dr' = \frac{1}{4\pi} \int \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot \vec{c}(\vec{r}\,') \, d\vec{r}\,' =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int \text{grad}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot \vec{c}(\vec{r}\,') \, d\vec{r}\,' = - \frac{1}{4\pi} \int \text{div}_{r'} \left\{\frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} dr' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}_{r'} \vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d\vec{r}\,'.$$

Beide termen zijn nul, de eerste omdat we de integraal in een oppervlakte-integraal kunnen omvormen, waarbij het oppervlak naar oneindig gaat en de integrand daar nul wordt, de tweede omdat $\text{div}\, \vec{c} = 0$.]

We hebben nu tenslotte:

$$\vec{v}_2 = \text{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int \text{rot}_r \left\{\frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} d\vec{r}\,'.$$

Door toepassing van reeds genoemde formules uit de vektoranalyse kunnen we dit omvormen tot:

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{4\pi}\int \text{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \wedge \vec{c}(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = \frac{1}{4\pi}\int \vec{c}(\vec{r}\,') \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d\vec{r}\,'.$$

<u>Resumerend</u>: Als div $\vec{v} = s$, rot $\vec{v} = \vec{c}$ (met div $\vec{c} = 0$) dan hebben deze vgl. onder de genoemde voorwaarden de eenduidige oplossing:

$$\vec{v} = -\,\text{grad}\,\varphi + \text{rot}\,\vec{A}$$

waarin:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{s(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,' \quad \text{en} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{c}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'.$$

In dit resultaat herkent u vermoedelijk reeds belangrijke formules uit de elektrostatica en de theorie van magneetvelden van stationaire stromen.

3. <u>Algemene orthogonale coördinaten.</u>

Tenslotte zullen we nog in het kort de uitdrukkingen afleiden voor grad, div en rot in andere dan Cartesische coördinaten. Voor een algemeen, maar nog wel orthogonaal, coördinatenstelsel u_1, u_2, u_3 wordt het lijnelement gegeven door

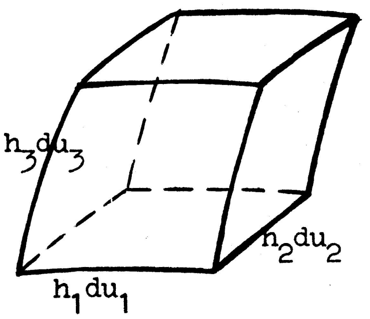
$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2\,, \quad \text{waarin } h_1, h_2 \text{ en } h_3$$

nog functies zijn van u_1, u_2 en u_3.

Voorbeeld: sferische poolcoördinaten r, θ, φ : $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

cylinder coördinaten z, ρ, θ : $ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Bekijk een infinitesimaal "parallelopipedum" met ribben h_1du_1, h_2du_2, h_3du_3.



Nu was $d\varphi = \text{grad}\ \varphi \cdot \vec{ds}$ en dus de 1-component van grad φ:

$$(\text{grad}\ \varphi)_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \text{ etc.}$$

Zo volgt uit Gauss:

$$\text{div}\ \vec{v}\ h_1 h_2 h_3\ du_1 du_2 du_3 = \oint \vec{v} \cdot \vec{do}$$

$$\text{div}\ \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 v_3) \right\} .$$

Evenzo volgt uit Stokes:

$$(\text{rot}\ \vec{v})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 v_2) \right\} , \quad \text{en cyclisch.}$$

Daar $\Delta = \text{div grad}$, wordt

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \text{cyclisch} \right\} .$$

Hoofdstuk II De Maxwell-vergelijkingen in vakuum.

1. Algemeen.

We hebben twee vektorvelden, de elektrische veldsterkte $\vec{E}$ en de magnetische veldsterkte $\vec{B}$, die in het algemeen funkties zijn van de coördinaten en de tijd.

Ze voldoen aan de volgende vergelijkingen:

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$

(2) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(3) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Hierin zijn $\rho(x,y,z,t)$ en $\vec{j}(x,y,z,t)$ respectievelijk ladingsdichtheid en stroomdichtheid.

ρ en $\vec{j}$ zijn geen onafhankelijke funkties: Neem $\frac{\partial}{\partial t}$ van (1) en div van (4) en tel op:

(5) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, de zg. continuïteitsvergelijking, die behoud van lading uitdrukt.

Als we ρ en $\vec{j}$ als funkties van coördinaten en tijd gegeven denken (zodanig dat (5) steeds vervuld is), stellen de vgl. (1) t/m (4) een aantal lineaire partiële differentiaalvgl. met inhomogene termen voor, waaraan $\vec{E}$ en $\vec{B}$ moeten voldoen. Als men hier $\vec{E}$ en $\vec{B}$ uit oplost, geven deze op hun beurt weer de kracht op een geladen deeltje (lading e):

(6) $\vec{K} = e\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B}\right\}$, de Lorentzkracht.

Men realisere zich dat het probleem in principe gecompliceerder is dan boven gesteld. ρ en $\vec{j}$ zijn in principe niet gegeven, maar worden op hun beurt weer door de velden, die de krachten op de ladingen geven, bepaald. Naast de veldvgl. (1) t/m (4) heeft men de bewegingsvgl. van de geladen deeltjes en in principe moet men deze tesamen oplossen. Meestal echter beschouwt men ρ en $\vec{j}$ als gegeven en in de praktijk is dit vaak ook wel (in grote benadering) geoorloofd.

Als we alleen puntladingen hebben, worden ρ en $\vec{j}$ uitgedrukt met behulp van δ-funkties:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i e_i \delta\{\vec{r}-\vec{r}_i(t)\} \qquad \vec{j}(\vec{r},t) = \sum_i e_i \dot{\vec{r}}_i(t) \delta\{\vec{r}-\vec{r}_i(t)\} .$$

In makroskopische toepassingen werken we vaak met continue ladings- en stroomverdelingen: $\rho d\vec{r}$ is dan de totale lading in het volumeelement $d\vec{r}$, $\vec{j}d\vec{r}$ is $\sum_i e_i \vec{v}_i$ gesommeerd over alle ladingen in $d\vec{r}$. In plaats van (6) krijgen we dan voor de krachtdichtheid $\vec{k}$ (kracht per volumeeenheid)

$$\vec{k} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \wedge \vec{B} .$$

We hebben in bovenstaande vgl. zg. Gauss-eenheden gebruikt, zoals in de theoretische fysica vrijwel algemeen gebruikelijk is. Zo bv. in de boeken van Becker en Jackson, in Panofsky Phillips worden m.k.s.-eenheden gebruikt, waaruit men de vgl. in Gauss-eenheden krijgt door te nemen $\epsilon_o = \frac{1}{4\pi}$ en $\mu_o = \frac{4\pi}{c^2}$ (c is een natuurconstante, de lichtsnelheid in vakuum). Verder zij nog opgemerkt, dat bovenstaande vgl. algemeen gelden, ook in een medium, mits men dan bij ρ en $\vec{j}$ ook de ladingen en stromen in de atomen meerekent. Men kan uit deze vgl. dan de bekende vgl. in een medium afleiden, waarin naast $\vec{E}$ en $\vec{B}$ ook $\vec{D}$ en $\vec{H}$ optreden, en dan hoeft men in ladings- en stroomdichtheid alleen de uitwendige (zg. ware of vrije) ladingen en stromen mee te nemen. (Dus alleen ionen en vrije elektronen, geen ladingen of stromen in neutrale atomen of molekulen.). Hierop zullen we later nog terugkomen.

We kunnen de Maxwell-vgl. uiteraard ook in integraalvorm schrijven. Daartoe passen we de stellingen van Gauss en Stokes toe (we beperken ons tot stilstaande oppervlakken).

(1a) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{o} = 4\pi \int \rho \, d\vec{r}$, integratie over gesloten oppervlak, $\int \rho \, d\vec{r}$ is de omsloten lading.

(2a) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c}\int \dot{\vec{B}}\cdot d\vec{o}$, oppervlak met begrenzing, induktiewet van Faraday.

(3a) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{o} = 0$, integratie over gesloten oppervlak. Er zijn geen magnetische polen.

(4a) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\cdot d\vec{o} + \int \dot{\vec{E}}\cdot d\vec{o}$, oppervlak met begrenzing.

De laatste term in (4a) heeft Maxwell toegevoegd, het is de zg. verplaatsingsstroom van Maxwell, die zoals bekend tot gevolg heeft dat elektromagnetische golven met voortplantingssnelheid c kunnen optreden. Ook de continuïteitsvgl. (5) kan in integraalvorm worden geschreven:

(5a) $\frac{d}{dt}\int \rho \, d\vec{r} + \oint \vec{j}\cdot d\vec{o} = 0$, integratie over gesloten oppervlak.

Dit zegt: de toename per sec van de hoeveelheid lading binnen een gesloten oppervlak + de hoeveelheid lading die per sec door het begrenzend oppervlak naar buiten stroomt is nul (behoud van lading). Deze betrekking zou niet uit de Maxwell-vgl. volgen als daarin de verplaatsingsstroom werd weggelaten.

Het zal duidelijk zijn dat de Maxwell-vgl. in bovenstaande vorm eerst geleidelijk door induktie en generalisatie uit vele waarnemingsresultaten zijn opgesteld. Het eerst werden de verschijnselen van de elektrostatica en magnetostatica ontdekt en bestudeerd. Vervolgens magnetische velden veroorzaakt door stationaire stromen (Oersted, Ampère), elektrolyse, induktieverschijnselen, dielektrica (Faraday), elektromagnetische golven (verplaatsingsstroom van Maxwell, proeven van Hertz e.a.), elektrodynamica in bewegende media, relativiteitstheorie. In de volgende paragrafen zullen we althans sommige van deze verschijnselen nader bespreken.

2. Elektrostatica.

De Maxwell-vergelijkingen beschrijven als speciaal geval de elektrostatische verschijnselen. Voor het geval dat de ladingsdichtheid niet

van de tijd afhangt ($\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})$) en de stroomdichtheid $\vec{j}$ nul is hebben ze nl. een statische oplossing, waarbij $\vec{B} = 0$ en $\vec{E}$ slechts van de coördinaten afhangt. Ze reduceren in dit geval tot: rot $\vec{E} = 0$, div $\vec{E} = 4\pi\rho$, terwijl de krachtdichtheid wordt: $\vec{k} = \rho\vec{E}$. Uit rot $\vec{E} = 0$ volgt, dat er een skalaire potentiaal φ is met $\vec{E} = -$ grad φ. Voor φ krijgen we dan de vgl. div grad $\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho$, de vgl. van Poisson.

In Hoofdstuk I hebben we voor het geval dat $\rho(\vec{r})$ slechts in een eindig gebied van de ruimte van nul verschilt (en φ in het oneindige snel genoeg naar nul gaat), als oplossing gevonden:

$$(7) \quad \varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,' \quad \text{en dus} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d\vec{r}\,' .$$

In het speciale geval van een puntlading ter plaatse $\vec{r}_o$ is $\rho(\vec{r}) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_o)$ en dan volgt uit (7):

$$(8) \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_o|}, \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{e(\vec{r}-\vec{r}_o)}{|\vec{r}-\vec{r}_o|^3},$$ d.i. de wet van <u>Coulomb</u>.

De in hoofdstuk I afgeleide formule $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$ is dus een een speciaal geval van de vgl. van Poisson (nl. voor een puntlading); omgekeerd kunnen we (7) zien als een voor de hand liggende generalisatie van (8) voor een continue ladingsverdeling.

<u>Opmerking</u>: Wij hebben hier de wet van Coulomb afgeleid uit de Maxwell-vgl. der elektrostatica rot $\vec{E} = 0$, div $\vec{E} = 4\pi\rho$. Men kan uiteraard ook omgekeerd te werk gaan: Uit (8) volgt rot $\vec{E} = 0$. Eveneens volgt door directe berekening dat voor het veld van een puntlading div $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ als tenminste $\vec{r} \neq \vec{r}_o$. Dat dit niet geldt in $\vec{r}_o$ zelf, volgt als we voor een bol(letje) om $\vec{r}_o$ berekenen dat $\oint \vec{E}\cdot d\vec{o} = 4\pi e$. Dan moet voor een puntlading wel div $\vec{E}(\vec{r}) = 4\pi e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_o)$.

Voor een continue ladingsverdeling volgt uit (7), als we integreren over een willekeurig gesloten oppervlak:

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{do} = \int \rho(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' \int \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{do}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} .$$

Nu is het niet moeilijk aan te tonen dat de laatste integraal gelijk is aan 4π als $\vec{r}\,'$ binnen het oppervlak ligt en 0 als $\vec{r}\,'$ er buiten ligt (kwestie van ruimtehoek). We vinden dus $\oint \vec{E}\cdot\vec{do} = 4\pi \int \rho(\vec{r})\, d\vec{r}$, waarbij de laatste integraal over het volume binnen het oppervlak wordt uitgestrekt. Daar dit geldt voor een willekeurig gesloten oppervlak, volgt hieruit div $\vec{E} = 4\pi\rho$.

Het lijkt misschien alsof met (7) de oplossing van alle elektrostatische problemen is geleverd. Dit is niet juist, want vaak is de ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ juist niet bekend. Vaak heeft men een probleem van volgende aard:

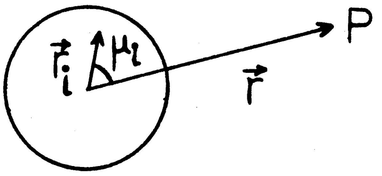
Gegeven één of meer geleiders. Hierin is $\vec{E} = 0$ (anders zou onmiddellijk een verplaatsing van lading optreden totdat het veld nul geworden is). In de geleiders is dus φ = constant. Het oppervlak van een geleider is een equipotentiaalvlak. $\vec{E}$ (buiten de geleiders) staat loodrecht op het oppervlak. De lading van een geleider zit aan het oppervlak. Laat de oppervlaktelading zijn ω per cm^2. Dan geldt aan het oppervlak:

$$E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\omega .$$

Dit volgt uit (1a) door dit toe te passen op een plat doosje net als op p.5. Buiten de geleiders geldt $\Delta\varphi = 0$. Men vraagt nu een oplossing van deze Laplace-vergelijking, die op de geleidende oppervlakken gegeven constante waarden aanneemt. Dit heet het probleem van Dirichlet (hiervoor is het wiskundig niet noodzakelijk dat de gegeven waarden op het oppervlak constant zijn). Of anderzijds: gevraagd een oplossing van $\Delta\varphi = 0$ die op de geleidende oppervlakken constante waarden aanneemt. Die constante waarden zijn nu echter niet gegeven,

maar wel is de totale lading van de geleiders gegeven, nl. $Q_i = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial\varphi}{\partial n_i}\, do$. In Hoofdstuk I hebben we reeds gezien dat deze problemen eenduidig bepaald zijn. (Het 2[e] probleem is niet precies dat van Neumann, maar het eenduidigheidsbewijs verloopt analoog.) We zullen op het werkcollege een aantal elektrostatische problemen behandelen.

We gaan nu wat uitvoeriger in op de zg. multipoolontwikkeling. Gegeven een bol met straal R. Binnen de bol liggen een willekeurig aantal puntladingen e_i op de plaatsen $\vec{r}_i$ (het middelpunt van de bol wordt genomen als oorsprong van het coördinatenstelsel) of ook eventueel een continue ladingsverdeling $\rho(\vec{r}\,')$. Gevraagd wordt de potentiaal buiten de bol, dus voor $r > R$.



Hiervoor geldt de vgl. van Laplace: $\Delta\varphi = 0$. Het ligt voor de hand deze vgl. in sferische poolcoördinaten r, θ, φ te schrijven en dan te separeren.

Op college zullen we laten zien, dat men als mogelijke oplossingen vindt:

$$r^{\ell} P_{\ell}^{m} (\cos\theta)\, e^{im\varphi} \quad \text{en} \quad \frac{1}{r^{\ell+1}} P_{\ell}^{m} (\cos\theta)\, e^{im\varphi} .$$

Hierin kan ℓ de waarden 0,1,2... aannemen en bij gegeven ℓ kan m de gehele waarden $-\ell \leq m \leq +\ell$ aannemen. De funkties $P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$ zijn de zg. bolfunkties, ze zijn orthogonaal op het oppervlak van een bol, $P_{\ell}^{m}(\cos\theta)$ zijn de zg. toegevoegde funkties van Legendre.

We verwachten derhalve dat de potentiaal buiten de bol geschreven kan worden als een superpositie $\sum_{\ell}\sum_{m} a_{\ell m} \frac{1}{r^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$. De oplossingen met r^{ℓ} kunnen buiten de bol niet voorkomen, omdat ze in het oneindige niet naar nul gaan. De vraag is: hoe luiden de coëf-

ficiënten $a_{\ell m}$? Ze worden uiteraard bepaald door de gegeven ladingsverdeling binnen de bol. Nu is de potentiaal veroorzaakt in $P(\vec{r})$ door een puntlading e_i in $\vec{r}_i$ gelegen:

$$\frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \frac{e_i}{r\sqrt{1 - \frac{2r_i}{r}\cos\mu_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}} = \frac{e_i}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r_i}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}\,(\cos\mu_i)\,.$$

Deze ontwikkeling definieert eigenlijk de Legendre-polynomen P_{ℓ} (of P_{ℓ}^{o}). We passen nu het zg. additietheorema van de bolfunkties toe (dat we hier niet bewijzen):

$$P_{\ell}(\cos\mu_i) = \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} P_{\ell}^{m}(\cos\theta_i)\, e^{-im\varphi_i} P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

waarin θ_i, φ_i de poolhoeken zijn van de puntlading $\vec{r}_i$ en θ, φ die van het punt $\vec{r}$. We vinden zo: $(r > R)$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{e_i r_i^{\ell}}{r^{\ell+1}} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} P_{\ell}^{m}(\cos\theta_i)\, e^{-im\varphi_i} P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

We definiëren nu de <u>multipoolmomenten</u> van de ladingsverdeling:

$$(9) \qquad Q_{\ell m} = \sum_{i} e_i r_i^{\ell} P_{\ell}^{m}(\cos\theta_i)\, e^{-im\varphi_i},$$

dan geldt dus:

$$(10) \quad \varphi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \frac{Q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Men kan dit zonder meer generaliseren voor een continue ladingsverdeling. De multipoolmomenten worden dan

$$Q_{\ell m} = \int \rho(\vec{r}\,')\, r'^{\ell} P_{\ell}^{m}(\cos\theta')\, e^{-im\varphi'} d\vec{r}\,'.$$

De potentiaal buiten de bol is nu geschreven als afkomstig van een rij multipolen in het middelpunt.

Opmerkingen:

1°. Een bolsymmetrische ladingsverdeling heeft alleen een monopool $\ell = 0$. Alle hogere multipoolmomenten zijn nul. De potentiaal buiten een bolsymmetrische ladingsverdeling is dezelfde alsof de hele lading in het middelpunt geconcentreerd was.

2°. Als $r \gg R$ nemen de termen met toenemende ℓ snel in grootte af.

3°. Er zijn $2\ell+1$ multipoolmomenten van de 2^{ℓ}-pool, bv. 5 quadrupoolmomenten ($\ell=2$).

4°. Neem eens $\ell=1$. We krijgen dan 3 dipoolmomenten: Q_{11}, Q_{10}, $Q_{1,-1}$. Hoe hangen deze samen met de bekende definitie van de dipoolmomentvektor $\vec{\mu} = \sum_i e_i \vec{r}_i$? $\left(Q_{11} = \sum_i e_i r_i \sin\theta_i e^{-i\varphi_i} = \mu_x - i\mu_y, \text{ etc.}\right)$.
Laat zien dat de potentiaal van een dipool in de oorsprong is: $\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{r^3}$. Bereken de veldsterkte afkomstig van zo'n dipool.

5°. We kunnen ons afvragen hoe groot de energie van de bovenbeschouwde ladingsverdeling is in een gegeven uitwendige potentiaal $\Phi(x,y,z)$. We kunnen Φ in het gebied binnen de bol met straal R altijd schrijven als een superpositie van de daar toepasbare oplossingen van de vgl. $\Delta\Phi = 0$, dwz. voor $r < R$:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m}\, r^{\ell}\, P_{\ell}^{m}(\cos\theta)\, e^{-im\varphi}.$$

Dan vinden we voor de energie van de ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$ in dit potentiaalveld:

$$\text{(11) Energie} = \int \Phi(\vec{r})\rho(\vec{r})d\vec{r} = \sum_{\ell}\sum_{m} c_{\ell m} \int \rho(\vec{r}) r^{\ell} P_{\ell}^{m}(\cos\theta) e^{-im\varphi} d\vec{r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m}\, Q_{\ell m}$$

en wordt dus op eenvoudige wijze uitgedrukt in de multipoolmomenten van de ladingsverdeling. Ga na wat dit wordt voor het geval dat er alleen een dipool of een quadrupool in het middelpunt van de bol staat.

6°. U kent de uitdrukking voor de energie van een aantal puntladingen in elkaars elektrostatisch veld:

$$U = \tfrac{1}{2} \sum_{i \neq k} \sum \frac{e_i e_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = \tfrac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i ,$$

waarin φ_i de potentiaal is van de andere ladingen ter plaatse van de puntlading i. Bij een continue ladingsverdeling wordt dit:

$$U = \tfrac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \vec{E}\, d\vec{r} = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E}\cdot\operatorname{grad} \varphi\, d\vec{r} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\vec{r}.$$

We vinden zo de bekende uitdrukking voor de energiedichtheid $\frac{1}{8\pi} E^2$. Vgl. Jackson 1.11. Vraag: waarom ontbreekt in de uitdrukking (11) de faktor $\tfrac{1}{2}$?

De spanningstensor van Maxwell.

In de elektrostatica is de krachtdichtheid gegeven door $\vec{k} = \rho\vec{E}$. We zullen dit nu schrijven als de divergentie van een spanningstensor $\vec{\vec{T}}$, dwz. dat

$$(12) \qquad k_i = \operatorname{Div} T_{ik} \equiv \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ geschreven voor } x,y,z).$$

Immers $\vec{k} = \rho\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E}$. We tellen bij het rechterlid op $-\frac{1}{4\pi} \vec{E} \wedge \operatorname{rot} \vec{E}$, dit is toch nul. Dan wordt bv.

$$8\pi k_x = 2E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) - 2E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + 2E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2E_x E_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2E_x E_z\right).$$

De spanningstensor wordt nu gedefinieerd als:

$$(13) \qquad \vec{\vec{T}} = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} 2E_x^2 - E^2 & 2E_x E_y & 2E_x E_z \\ 2E_x E_y & 2E_y^2 - E^2 & 2E_y E_z \\ 2E_x E_z & 2E_y E_z & 2E_z^2 - E^2 \end{pmatrix}$$

Dit is een symmetrische tensor: $T_{ik} = T_{ki}$.

Nemen we nu een gebied begrensd door een gesloten oppervlak. De totale kracht op de ladingen in dit gebied is nu:

(14) $\vec{K} = \int \vec{k}\, d\vec{r} = \int \mathrm{Div}\, \vec{\vec{T}}\, d\vec{r} = \oint \vec{\vec{T}} \cdot d\vec{o}$ over het begrenzend oppervlak.

De laatste gelijkheid is een directe generalisatie van de stelling van Gauss voor de divergentie van een vektor. We kunnen bovenstaande formule ook in componenten schrijven:

$$K_i = \oint T_{in}\, do\, .$$

Hier is $\vec{n}$ de naar buiten gerichte normaal en bv.

$T_{xn} = T_{xx} \cos(n,x) + T_{xy} \cos(n,y) + T_{xz} \cos(n,z)$. We zien dat de wet van aktie = reaktie geldt, want de kracht uitgeoefend <u>op</u> een door een oppervlak omsloten gebied is gelijk en tegengesteld aan de kracht <u>door</u> dat gebied op het buitengebied uitgeoefend (de normaal heeft in het tweede geval de tegengestelde richting). Slaan we het oppervlak over het hele veldgebied heen, zodanig dat het veld op het oppervlak naar nul gaat, dan wordt de totale kracht nul, dwz. de impuls van een afgesloten systeem is constant.

<u>Opgave</u>: Beschouw 2 puntladingen. Neem als gesloten oppervlak het mediaanvlak plus een halve bol met oneindige straal. Bereken de kracht die de ladingen op elkaar uitoefenen, door de spannings - tensor over het gesloten oppervlak te integreren.

We komen in het algemene geval van elektromagnetisme nog terug op de spanningstensor. Voor Faraday en Maxwell waren deze spanningen echte spanningen in een elastisch medium, de ether. Voor ons hebben ze slechts een formele, beschrijvende betekenis.

3. Stationaire stromen.

In deze paragraaf zullen we in het kort bespreken het magnetisch veld veroorzaakt door stationaire stromen, dwz. we gaan uit van het geval $\rho = 0$, $\vec{j}$ onafhankelijk van t. Uit de continuiteitsvgl. volgt dan

div $\vec{j} = 0$. Bij stroomgeleidende draden betekent dit laatste dat op een gegeven tijdstip door iedere doorsnede dezelfde stroom gaat. Dit laatste mogen we ook nog in goede benadering aannemen voor de gebruikelijke wisselstromen, die men wel quasi-stationair noemt. Ook daar kan men de verplaatsingsstroom $\frac{1}{4\pi}\dot{\vec{E}}$ nog verwaarlozen bij de geleidingsstroom $\vec{j}$. Voor een uitvoeriger bespreking van het onderwerp in deze paragraaf kan ik verwijzen naar het college Elektrodynamica van Dr. Hooyman.

We gaan uit van de Maxwell-vgl., die zich voor dit geval reduceren tot: div $\vec{B} = 0$, rot $\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$. De laatste vgl. kunnen we ook schrijven als: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}\cdot d\vec{o}$. Ook hiervoor hebben we de oplossing reeds gegeven in Hfst. I. We voeren in een vektorpotentiaal $\vec{A}$, zodat $\vec{B}$ = rot $\vec{A}$ en div $\vec{A} = 0$. Voor $\vec{A}$ vinden we dan de vgl.

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

met als oplossing:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,' \,. \qquad (15)$$

We hebben vroeger gezien dat deze oplossing inderdaad voldoet aan div $\vec{A} = 0$ en verder dat dan:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \wedge (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d\vec{r}\,' \,. \qquad (16)$$

Stel eens dat we te maken hebben met een lineaire stroom, een stroom door een geleidende draad met stroomsterkte I. Dan wordt: $\vec{j}\,d\vec{r}\,' = I\,d\vec{s}$ ($d\vec{s}$ is het lijnelement langs de stroomdraad).

De kringintegraal wordt dan:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} I$ als we integreren langs een gesloten lijn die de stroom omvat

$= 0$ als de integratieweg de stroom niet omvat.

Bovenstaande oplossing gaat over in

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\int \frac{d\vec{s} \wedge (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,. \qquad (17)$$

$d\vec{s}$ is het lijnelement van de stroomdraad, $\vec{r}\,'$ doorloopt de punten van de stroomdraad. De laatste uitdrukking is bekend als de wet van Biot en Savart.

Een aantal opgaven die we met behulp van bovenstaande formules kunnen oplossen zijn:

1°. Het magnetisch veld van een oneindig lange rechte stroomdraad (ook met Biot-Savart).

$\vec{A} = \frac{\vec{I}}{c} \log\left(\frac{x^2+(y+l/2)^2}{x^2+(y-l/2)^2}\right)$

2°. Bekijk twee evenwijdige oneindig lange stroomdraden, waardoor gelijke maar tegengestelde stromen lopen. Bereken de vektorpotentiaal $\vec{A}$ in een willekeurig punt van de ruimte.

3°. Bepaal het magnetisch veld langs de as van een stroomdraad in de vorm van een cirkel.

4°. Bepaal het magnetisch veld van een oneindig lange rechte cylindervormige stroomgeleider (straal doorsnede a), waarin de stroomdichtheid constant is over de doorsnede.

5°. Bepaal het magnetisch veld opgewekt door een homogeen geladen bol, die om zijn as roteert.

Kracht tussen twee stroomgeleiders.

Stel we hebben twee stroomgeleidende lichamen. Dan is de kracht door 2 op 1 uitgeoefend gegeven door:

$$\vec{K}_{12} = \frac{1}{c}\int_{V_1} \vec{J}_1(\vec{r}) \wedge \vec{B}_2(\vec{r})\, d\vec{r} = \frac{1}{c^2}\int_{V_1} d\vec{r}\int_{V_2} d\vec{r}\,'\; \vec{J}_1(\vec{r}) \wedge \left\{\vec{J}_2(\vec{r}\,') \wedge \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right\} .$$

We kunnen dit herleiden met een formule uit de vektorrekening:

$$\vec{K}_{12} = \frac{1}{c^2}\int_{V_1} d\vec{r}\int_{V_2} d\vec{r}\,'\; \left\{\vec{J}_2(\vec{r}\,')\left(\vec{J}_1(\vec{r})\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right) - \left(\vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{J}_2(\vec{r}\,')\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right\} .$$

Nu is de eerste integraal nul, immers:

$$\int_{V_1} d\vec{r}\; \vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\int_{V_1} d\vec{r}\; \vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\int_{O_1} d\vec{o} \cdot \frac{\vec{J}_1(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$+ \int_{V_1} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, \mathrm{div}\, \vec{J}_1(\vec{r}) = 0 .$$

Derhalve:

$$\vec{K}_{12} = -\frac{1}{c^2}\int\limits_{V_1} d\vec{r} \int\limits_{V_2} d\vec{r}\,' \left(\vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \vec{J}_2(\vec{r}\,')\right) \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} .$$

Voor twee lineaire stroomgeleiders wordt dit:

$$\vec{K}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\int\limits_1\int\limits_2 d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\int\limits_1\int\limits_2 d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2 \,\mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} .$$

Hier doorloopt $\vec{r}$ stroomdraad 1, $\vec{r}\,'$ stroomdraad 2.

We kunnen dit ook schrijven als:

(18) $$\vec{K}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\,\mathrm{grad}_1 \int\limits_1\int\limits_2 \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

waarbij we onder grad_1 verstaan de verandering van de integraal als we stroomdraad 1 in zijn geheel een beetje in zekere richting (voor x-comp van $\vec{K}$ in de x-richting) verplaatsen. We kunnen dit nog uitdrukken in de coëfficiënt van wederkerige induktie L_{12} van beide stroomgeleiders. Als nl. de magnetische flux afkomstig van 2 door 1 omvat Φ_{12} genoemd wordt, geldt:

$$\frac{1}{c}\Phi_{12} = L_{12} I_2 = \frac{1}{c}\oint \vec{B} \cdot d\vec{o}_1 = \frac{1}{c}\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}_1 ,$$

verder is

$$\vec{A} = \frac{I_2}{c}\oint \frac{d\vec{s}_2}{r_{12}} .$$

(19) Hieruit volgt: $L_{12} = \frac{1}{c^2}\oint\limits_1\oint\limits_2 \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{r_{12}}$, waarbij r_{12} de afstand tussen 2 punten respectievelijk van 1 en 2 aangeeft. Dit is de bekende formule van Neumann voor de coëfficiënt van wederkerige induktie. Uit (18) en (19) volgt nu dat we kunnen schrijven:

(20) $$\vec{K}_{12} = I_1 I_2 \,\mathrm{grad}_1 \, L_{12} ,$$

een resultaat dat we ook hadden kunnen vinden uit de uitdrukking voor de magnetische energie van een stelsel stationaire stromen:

$U = \frac{1}{2}\sum\limits_i\sum\limits_k L_{ik} I_i I_k$ (vgl. college Elektrodynamica).

4. Elektromagnetische golven in vakuum.

We bekijken de homogene Maxwell-vgl., dwz. we nemen $\rho = 0$ en $\vec{j} = 0$:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$$

We tonen nu aan dat deze vgl. oplossingen hebben in de vorm van monochromatische vlakke golven. We proberen nl. oplossingen te vinden van de gedaante:

$$\vec{E} = \vec{\epsilon}_1 \exp\{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t\}$$

$$\vec{B} = \vec{\epsilon}_2 \exp\{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t\}$$

met reële constante waarden van $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{\epsilon}_2$, $\vec{k}$ en ω. $\vec{k}$ is de golfvektor, zijn richting geeft de voortplantingsrichting aan, zijn grootte k (het golfgetal) hangt met de golflengte λ samen als $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ω is de (cirkel) frequentie. Oppervlakken waar deze velden op gegeven tijdstip een constante waarde hebben zijn de platte vlakken $\vec{k}\cdot\vec{r}$ = constant.

Bovenstaande uitdrukkingen zijn nog complex. Als ze een oplossing vormen, is ook het reële deel ervan een oplossing en we bedoelen voortaan steeds als fysische uitdrukking voor de veldsterkten dat reële deel.

Substitueren we nu deze uitdrukkingen in de bovenstaande Maxwell-vgl., dan vinden we:

$$\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_1 = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_1 = \frac{\omega}{c}\vec{\epsilon}_2$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_2 = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{\epsilon}_2 = -\frac{\omega}{c}\vec{\epsilon}_1$$

We zien dat $\vec{\epsilon}_1 \perp \vec{k}$ en eveneens $\vec{\epsilon}_2 \perp \vec{k}$, dwz. onze golven zijn <u>transversaal</u>. U ziet nu ook waarom men een divergentievrije vektor wel

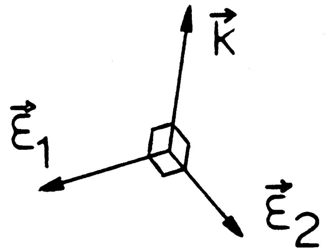
transversaal noemt. Verder is $\vec{\epsilon}_1 \perp \vec{\epsilon}_2$ en als we $\omega > 0$ kiezen (hetgeen gebruikelijk is), vormen $\vec{\epsilon}_1$, $\vec{\epsilon}_2$, $\vec{k}$ een rechtshandig coördinatenstelsel. Verder volgt nu dat: $k\ \epsilon_1 = \frac{\omega}{c}\ \epsilon_2$ en $k\ \epsilon_2 = \frac{\omega}{c}\ \epsilon_1$, dus $\epsilon_1 = \epsilon_2$ en $k = \frac{\omega}{c}$. Uit $k = \frac{\omega}{c}$ volgt dat c de fasesnelheid is van de elektromagnetische golven. De relatie $\omega = ck$ heet de dispersiewet, hij legt de afhankelijkheid van de frequentie van golflengte (of golfvektor) vast.

Men kiest voor $\vec{\epsilon}_1$ en $\vec{\epsilon}_2$ vaak twee onderling loodrechte eenheidsvektoren; dan mogen we de oplossing nog met een willekeurige (complexe) amplitudefaktor vermenigvuldigen. Dus:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\ A\ \vec{\epsilon}_1\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\ -\ \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\ A\ \vec{\epsilon}_2\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\ -\ \omega t)} .$$

We hebben hier als oplossing een transversale, lineair gepolariseerde, vlakke, monochromatische golf neergeschreven, waarbij $\vec{k}$ nog willekeurig is. Bij iedere $\vec{k}$ hebben we nog twee onafhankelijke onderling loodrecht lineair gepolariseerde golven.



Een willekeurige superpositie van dergelijke oplossingen is natuurlijk weer een oplossing, dwz.

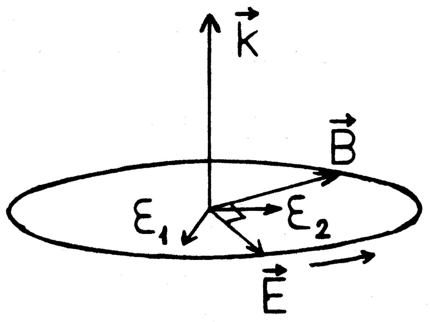
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re} \int A(\vec{k})\vec{\epsilon}_1(\vec{k})\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ d\vec{k}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \mathrm{Re} \int A(\vec{k})\vec{\epsilon}_2(\vec{k})\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\ d\vec{k},$$

waarin $\omega = ck$ en bij elke $\vec{k}$ de eenheidsvektoren $\vec{\epsilon}_1(\vec{k})$, $\vec{\epsilon}_2(\vec{k})$ (onderling orthogonaal en loodrecht op $\vec{k}$) samen met $\vec{k}$ een rechts stelsel vormen.

Verder zal duidelijk zijn dat men bij iedere oplossing van de inhomogene Maxwell-vgl. (bv. een elektrostatische of een stationaire oplossing) altijd een dergelijke golfoplossing van de homogene vgl. mag optellen.

We willen nog even kijken naar de gedaante van een circulair gepolariseerde vlakke golf. Hierbij draaien de vektoren $\vec{E}$ en $\vec{B}$ met frequentie ω rond in het vlak loodrecht op de voortplantingsrichting, dus:



$$\vec{E} = A\left\{\vec{\epsilon}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) - \vec{\epsilon}_2 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right\}$$

$$\vec{B} = A\left\{\vec{\epsilon}_1 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) + \vec{\epsilon}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right\}.$$

Hierin is A reëel genomen. Als we in de voortplantingsrichting kijken, dan draaien $\vec{E}$ en $\vec{B}$ rechtsom. Als $\vec{E}$ en $\vec{B}$ linksom zullen draaien, nemen we:

$$\vec{E} = \vec{A}\left\{\vec{\epsilon}_1 \cos(\;) + \vec{\epsilon}_2 \sin(\;)\right\}$$

$$\vec{B} = A\left\{-\vec{\epsilon}_1 \sin(\;) + \vec{\epsilon}_2 \cos(\;)\right\}.$$

Deze circulair gepolariseerde vlakke golven zijn uiteraard een eenvoudig speciaal geval van bovenstaande algemene oplossing. Als we de beide tegengesteld circulair gepolariseerde golven superponeren, krijgen we weer een lineair gepolariseerde (twee tegengesteld gerichte eenparige cirkelbewegingen met dezelfde frequentie geven samen een lineaire harmonische trilling).

Keren we nog even terug naar de homogene Maxwell-vgl. Er volgt:

$\text{rot rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, of daar $\text{div}\,\vec{E} = 0$:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Evenzo vinden we

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Iedere component van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ voldoet dus aan de golfvgl. $\Delta f - \frac{1}{c^2}\ddot{f} = 0$, die een golfvoortplanting met fasesnelheid c beschrijft. Als $\vec{E}$ en $\vec{B}$ onafhankelijke oplossingen van deze golfvgl. voorstellen, hoeven ze uiteraard nog niet aan de Maxwell-vgl. te voldoen.

De golfvgl. $\Delta f - \frac{1}{c^2}\ddot{f} = 0$ heeft de oplossing $f(\vec{k}\cdot\vec{r} - ckt)$ waarin f een willekeurige funktie van het aangegeven argument en $\vec{k}$ een willekeurige vektor voorstelt. Immers $\Delta f = k^2 f''$ en $\ddot{f} = c^2k^2f''$. Dit stelt een vlakke (echter geen monochromatische!) golf voor die zich in de $\vec{k}$-richting met snelheid c voortplant.

Hoofdstuk III — Algemene oplossing van de Maxwell-vergelijkingen voor tijdafhankelijke velden.

1. Potentialen en ijkinvariantie.

We bekijken nu het algemene geval dat ρ en $\vec{j}$ niet alleen van de coördinaten, maar ook van de tijd afhangen. Bij gewone wisselstromen hangt $\vec{j}$ wel is waar van de tijd af, maar kunnen we de verplaatsingsstroom $\frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$ nog verwaarlozen (quasi-stationnaire stroom). Dit doen we nu niet meer. We hebben:

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$

(2) $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$

(3) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(4) $\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$.

Daar $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ kunnen we invoeren een vektorpotentiaal $\vec{A}$, zodanig dat

(5) $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

$\vec{A}$ is hierdoor nog niet vastgelegd, we zouden de div van $\vec{A}$ nog kunnen voorschrijven. Substitutie van (5) in (2) geeft:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}\right) = 0 .$$

Er is dus een skalaire potentiaal $\varphi(\vec{r},t)$ zodat:

(6) $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$.

Als gevolg van (5) en (6) is nu aan (2) en (3) automatisch voldaan. We gaan nu (5) en (6) invullen in (1) en (4):

(7) $\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -4\pi\rho$

(8) $\Delta\vec{A} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$.

Aan deze vergelijkingen moeten de potentialen $\vec{A}$ en φ voldoen. Bij gegeven $\vec{A}$ en φ zijn $\vec{E}$ en $\vec{B}$ eenduidig bepaald (door (6) en (5)), maar het omgekeerde geldt niet. Als we nl. $\vec{A}$ en φ vervangen door:

(9) $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\chi(\vec{r},t)$

(10) $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$,

waarbij χ een willekeurige skalaire funktie is van coördinaten en tijd, krijgen we uit φ' en $\vec{A}'$ door toepassing van (5) en (6) dezelfde velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ als uit φ en $\vec{A}$. Dit is ook alle vrijheid die we hebben, want zal overal rot $\vec{A}'$ = rot $\vec{A}$ dan kunnen $\vec{A}$ en $\vec{A}'$ slechts een gradient verschillen.

De transformatie (9), (10) van de potentialen noemen we een <u>ijktransformatie</u> (gauge-transformation). Deze ijktransformaties vormen kennelijk een groep. Fysische grootheden mogen niet afhangen van de keus van χ, ze moeten zg. <u>ijkinvariant</u> zijn.

Door een geschikte keus van de ijking (dus van χ) kunnen we de vergelijkingen voor $\vec{A}$ en φ vereenvoudigen. 2 verschillende keuzen van de ijking worden veel gebruikt:

a) <u>Lorentz-ijking</u>. Kies div $\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0$. Dit heet de voorwaarde van Lorentz. Zelfs nu zijn nog ijktransformaties mogelijk:

We mogen nog kiezen: $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\chi$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\dot{\chi},$$

dan geldt ook nog div $\vec{A}' + \frac{1}{c}\dot{\varphi}' = 0$, mits χ voldoet aan $\Box\chi \equiv \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\ddot{\chi} = 0$. De ijktransformaties met $\Box\chi = 0$ vormen de zg. beperkte groep van ijktransformaties, die een ondergroep is van de algemene groep van ijktransformaties.

Als aan de Lorentz-voorwaarde

(11) $\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0$

is voldaan, worden de vgl. voor $\vec{A}$ en φ bijzonder eenvoudig, nl.

(12)
$$\Box\varphi = -4\pi\rho \qquad \Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Hierin is $\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ de zg. operator van d'Alembert.

Merk op dat (11) en (12) consistent zijn in zoverre dat

$$\Box\left(\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}\right) = -\frac{4\pi}{c}\left(\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0\,.$$

b) Coulomb-ijking of transversale ijking.

Hier wordt overal en ten allen tijde $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ gekozen, dus $\vec{A}$ is een transversale vektor. We weten dat we elke vektor $\vec{v}$ kunnen schrijven als $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{/\!/}$, waarin $\mathrm{div}\,\vec{v}_\perp = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{v}_\perp = \mathrm{rot}\,\vec{v}$ en $\mathrm{rot}\,\vec{v}_{/\!/} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{v}_{/\!/} = \mathrm{div}\,\vec{v}$. We kiezen hier dus $\vec{A} = \vec{A}_\perp$ ($\vec{A}_{/\!/} = 0$).

De vgl. voor de potentialen worden nu:

$$(13)\quad \begin{aligned} \Delta\varphi &= -4\pi\rho \\ \Box\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,. \end{aligned}$$

Ook hier weer consistentie, in zoverre dat

$$\Box(\mathrm{div}\,\vec{A}) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\left(\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0.$$

Uit $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ volgt nu: $\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,'$, dwz. in de Coulomb-ijking beschrijft φ de instantane (links en rechts dezelfde t!) Coulomb-wisselwerking.

Merk verder op dat $\mathrm{div}\left(\vec{j} - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0$. Dus

$\vec{j} - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \vec{j}_\perp$, de transversale component van de stroomdichtheid.
en
$+\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \vec{j}_{/\!/}$, de longitudinale component van de stroomdichtheid.

We hadden algemeen: $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$. Hieruit zien we dat in Coulomb-ijking:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E}_{/\!/} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\,\mathrm{grad}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,'\,.$$

Daar $\vec{E}_{/\!/}$ de instantane Coulomb-wisselwerking beschrijft, zal alleen $\vec{E}_\perp$ de eventuele excitatie van elektromagnetische golven (als gevolg van $\vec{j}_\perp$) beschrijven.

Hiervoor geldt:

(14) $\operatorname{div}\vec{A} = 0 \quad \Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\perp} \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \quad \vec{E}_{\perp} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$.

De Coulomb-ijking is soms voor praktische problemen eenvoudiger, de Lorentz-ijking heeft theoretische voordelen, omdat de vergelijkingen in relativistisch covariante vorm geschreven zijn (vgl. het volgende hoofdstuk).

2. Oplossing van de vergelijkingen voor de potentialen in Lorentz-ijking. Geretardeerde potentialen.

De vergelijkingen voor de potentialen in Lorentz-ijking luiden:

$$\Box\varphi = -4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t)\,.$$

Als ρ en $\vec{j}$ niet van de tijd afhangen, dan lossen we op (hetgeen we in het vorige hoofdstuk al hebben gedaan): $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ en $\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ ($\operatorname{div}\vec{A} = 0$) en we mogen dan bij de aldus verkregen statische respectievelijk stationaire oplossingen nog een willekeurige oplossing van de homogene golfvergelijkingen optellen.

Laat dus nu ρ en $\vec{j}$ wel van de tijd afhangen. We zullen nu aantonen, dat een oplossing gegeven wordt door:

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,'$$

en analoog voor $\vec{A}$. We moeten in de integraal de bijdrage van ρ nemen op de zg. geretardeerde tijd dwz. zoveel vroeger als een elektromagnetische golf tijd nodig heeft om van $\vec{r}\,'$ naar $\vec{r}$ te komen. We spreken van geretardeerde potentiaal. Aanschouwelijk kan men zich een dergelijke integraal als volgt voorstellen: We denken ons een bol met het punt $\vec{r}$ als middelpunt, die zich uit het oneindige komend met lichtsnelheid c tot het punt $\vec{r}$ samentrekt, zodanig dat hij daar juist op tijd t aankomt. Hij veegt dan als het ware de bijdragen van de ladingen tot de potentiaal bijeen op het moment dat hij deze passeert.

Bewijs: Net als in Hoofdstuk I met de vgl. van Poisson, kunnen we de vgl. $\Box\varphi = -4\pi\rho$ oplossen met behulp van de funktie van Green $G(r,t)$ die nu moet voldoen aan

$$\Box G(\vec{r},t) = -4\pi\ \delta(\vec{r})\ \delta(t) \qquad \left(\delta(\vec{r}) = \delta(x)\ \delta(y)\ \delta(z)\right).$$

Als $G(\vec{r},t)$ bekend is, wordt nl. de oplossing van $\Box\varphi = -4\pi\rho$:

$$\varphi(\vec{r},t) = \iint G(\vec{r}-\vec{r}\,',\ t-t')\ \rho(\vec{r}\,',t')\ d\vec{r}\,'\ dt'\ .$$

Om $G(\vec{r},t)$ te bepalen gaan we de vgl. $\Box G(\vec{r},t) = -4\pi\ \delta(\vec{r})\ \delta(t)$. Fourier transformeren m.b.t. de variabele t. Definieer dus:

$\hat{G}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{r},t)\ e^{i\omega t}\ dt$. Dan is omgekeerd

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(\vec{r},\omega)\ e^{-i\omega t}\ d\omega\ .$$

$\Box G(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \hat{G}(\vec{r},\omega)\ e^{-i\omega t}\ d\omega$. Verder is

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\ d\omega\ .$$

Dan moet $\hat{G}(\vec{r},\omega)$ voldoen aan: $\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{G}(\vec{r},\omega) = -4\pi\delta(\vec{r})$.

We weten al dat voor $\omega = 0$: $\hat{G}(\vec{r},0) = \frac{1}{r}$. $\left(\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\vec{r})\right)$.

Ik beweer nu dat:

$$\hat{G}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{r}\, e^{+i\frac{\omega}{c}r}\ .$$

Dit kan men verifiëren door $\Delta\hat{G}$ expliciet uit te rekenen. Bedenk dat $\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\vec{r})$ en dat werkend op een funktie die alleen van $|\vec{r}|$ afhangt $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}$. We vinden nu:

$$(15)\qquad G(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{c}r - i\omega t}\ d\omega = \frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{r}\ .$$

Dit heet de geretardeerde Green-funktie, hij is 0 voor $t < 0$.

Nu wordt:

$$(16)\quad \varphi(\vec{r},t) = \int \frac{d\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\ \rho(\vec{r}\,',t')\ \delta\!\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) = \int d\vec{r}\,'\ \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ .$$

Het zal duidelijk zijn dat we ook hadden kunnen nemen

$\hat{G}(\vec{r},\omega) = \frac{1}{r} e^{-i\frac{\omega}{c} r}$. Dan hadden we gevonden $G_{av}(\vec{r},t) = \frac{\delta(t + \frac{r}{c})}{r}$,

de geavanceerde Green-funktie. Deze had geleid tot

$$\varphi_{av}(\vec{r},t) = \int d\vec{r}\,' \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Deze geavanceerde oplossing is onfysisch, want het zou betekenen dat een lading die op zeker tijdstip eerst gecreëerd wordt reeds een veld geeft op willekeurig vroeger tijdstip. Wij zullen verder uitsluitend met de geretardeerde potentiaal werken. De oplossing voor de vektorpotentiaal verloopt natuurlijk net zo:

$$\text{(17)} \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\vec{r}\,'.$$

Eigenlijk zouden we nog moeten verifiëren dat onze oplossing (16), (17) aan de Lorentz-conditie voldoet. Dit kan door zorgvuldig differentiëren inderdaad expliciet nagerekend worden.

3. De behoudswetten van energie en impuls.

De krachtdichtheid was gegeven door $\vec{k} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \wedge \vec{B}$ of met $\vec{j} = \rho\vec{v}$ (één soort ladingsdragers ondersteld, dit kan echter zonder meer worden gegeneraliseerd) door $\vec{k} = \rho(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B})$.

De arbeid A per sec op de lading in zeker volume V verricht, wordt dan: $(\vec{v}\cdot(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0)$

$$A = \int_V \rho\vec{E}\cdot\vec{v}\, d\vec{r} = \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\, d\vec{r} = \frac{c}{4\pi}\int_V \vec{E}\cdot\left(\text{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\right) d\vec{r}.$$

Nu is: $-\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(E^2+B^2) - c\vec{B}\cdot\text{rot}\,\vec{E}$

en als we de vektorformule $\text{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}\cdot\text{rot}\,\vec{v} - \vec{v}\cdot\text{rot}\,\vec{w}$ toepassen, krijgen we

$$A = -\frac{1}{8\pi}\int_V \frac{d}{dt}(E^2+B^2)\, d\vec{r} - \frac{c}{4\pi}\int_V \mathrm{div}\,(\vec{E}\wedge\vec{B})\, d\vec{r}.$$

We interpreteren nu $U = \frac{1}{8\pi}\int (E^2+B^2)\, d\vec{r}$ als de veldenergie in volume V en de zg. vektor van Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{B})$ als de energiestroomdichtheid, d.i. de energie die per sec door 1 cm^2 loodrecht op de vektor $\vec{S}$ stroomt.

Als we de mechanische energie van de ladingen in V E_m noemen dan hebben we gevonden

$$\frac{d}{dt}(E_m+U) = -\oint \vec{S}\cdot d\vec{o}\,, \quad \text{of in differentiële vorm:}$$

(18)

$$\vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+B^2) = -\,\mathrm{div}\,\vec{S}.$$

Dit is de wet van behoud van energie, ook wel het theorema van Poynting genoemd. We kunnen de impuls analoog behandelen.

De toename van de mechanische impuls $\vec{P}_m$ van de ladingen in een zeker volume V wordt gegeven door:

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = \int_V \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\wedge\vec{B}\right) d\vec{r}.$$

We schrijven:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\vec{E},\quad \frac{\vec{j}}{c} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}\right),\quad -\frac{1}{c}(\dot{\vec{E}}\wedge\vec{B}) = -(\vec{E}\wedge\mathrm{rot}\,\vec{E}) - \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\vec{E}\wedge\vec{B}).$$

Derhalve:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_m + \frac{1}{4\pi c}\int_V (\vec{E}\wedge\vec{B})\, d\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int_V \left\{\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - (\vec{B}\wedge\mathrm{rot}\,\vec{B}) - (\vec{E}\wedge\mathrm{rot}\,\vec{E})\right\} d\vec{r}.$$

Als we nu de impuls van het elektromagnetisch veld definiëren als:

$$\vec{u} = \frac{1}{4\pi c}\int_V (\vec{E}\wedge\vec{B})\, d\vec{r} = \frac{1}{c^2}\int_V \vec{S}\, d\vec{r}$$

en als we invoeren de spanningstensor van Maxwell (generalisatie van het elektrostatisch geval, Hoofdstuk II, §2):

$$\vec{\vec{T}} = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} 2E_x^2 - E^2 + 2B_x^2 - B^2 & 2E_xE_y + 2B_xB_y & 2E_xE_z + 2B_xB_z \\ 2E_yE_x + 2B_yB_x & 2E_y^2 - E^2 + 2B_y^2 - B^2 & 2E_yE_z + 2B_yB_z \\ 2E_zE_x + 2B_zB_x & 2E_zE_y + 2B_zB_y & 2E_z^2 - E^2 + 2B_z^2 - B^2 \end{pmatrix}$$

en nog bedenken dat $\vec{B}$ div $\vec{B} = 0$, kunnen we schrijven:

(19) $\frac{d}{dt}(\vec{P}_m + \vec{u}) = \int_V \mathrm{Div}\,\vec{\vec{T}}\,d\vec{r} = \oint \vec{\vec{T}}\cdot d\vec{o}$.

Hierin is Div $\vec{\vec{T}}$ een vektor met x-comp. $\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}$.

$-T_{xn}$ stelt voor de x-comp. van de impuls die per sec per oppervlakte-eenheid uit het volume naar buiten stroomt.

Boven staat dus de wet van impulsbehoud, die we ook in differentiële vorm kunnen schrijven:

(20) $\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\wedge\vec{B} + \frac{\partial\vec{w}}{\partial t} = \mathrm{Div}\,\vec{\vec{T}}$,

waarin

$\vec{w} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\vec{S}$ de impulsdichtheid van het elektromagnetische veld voorstelt.

<u>Toepassing op stralingsdruk</u>: Laat een vlakke lichtgolf in vakuum loodrecht vallen op zwart plaatje dat alle straling absorbeert. Per sec per cm^2 wordt de energie geabsorbeerd: $\frac{c}{8\pi}(E^2+B^2)$. Dit is ook de grootte van de Poyntingvektor: $\frac{c}{4\pi}|(\vec{E}\wedge\vec{B})|$. Voor een vlakke lichtgolf zijn deze bedragen gelijk. Impulsoverdracht per sec per cm^2: $\frac{1}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{B})$. Dit geeft de stralingsdruk (kracht per cm^2). Dit is gelijk aan de energiedichtheid: $\frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$. Al deze uitdrukkingen moeten nog gemiddeld worden over de tijd.

Denken we aan fotonen, dichtheid N per cm^3. Dan is energiestroom per sec per cm^2: $Nh\nu c$. Impulsdichtheid derhalve $\frac{Nh\nu}{c}$, per lichtquant $\frac{h\nu}{c}$ (dit komt bv. tot uiting in het Comptoneffect).

4. Het elektromagnetisch veld van een willekeurig bewegende puntlading.

Stel een puntlading e beschrijft de volgende beweging: $\vec{q}(t)$.

Dan is $\rho(\vec{r},t) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{q}(t))$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = e\,\dot{\vec{q}}(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{q}(t))\,.$$

Vullen we deze ρ in (16) in, dan krijgen we voor de geretardeerde potentiaal:

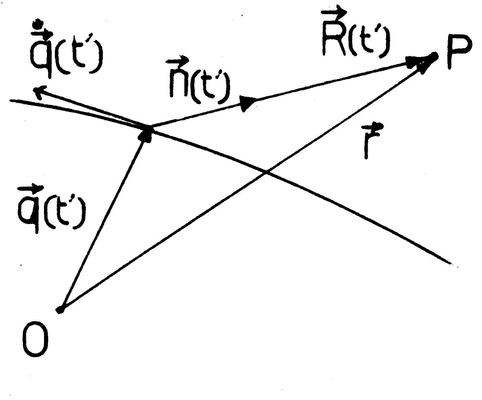
$$\varphi(\vec{r},t) = e\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d\vec{r}'\,\frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta(\vec{r}'-\vec{q}(t')) =$$

$$= e\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{q}(t')|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{q}(t')|} = e\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\frac{\delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')}$$

waarin $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{q}(t')$. Evenzo:

$$A(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\,\frac{\dot{\vec{q}}(t')\,\delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')}\,.$$

De waarde van t', zodat $t - t' = \frac{R(t')}{c}$ noemen we de geretardeerde tijd.



Om uit de potentialen $\vec{E}$ en $\vec{B}$ te berekenen, moeten we differentiëren naar de coördinaten x,y,z van $\vec{r}$ en naar t. Dit is een beetje ingewikkeld en men vergelijke bv. Jackson, p.466 voor de afleiding.

We geven hier het resultaat:

(21)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = e\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\varkappa^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{n}}{\varkappa^3 R}\wedge\left\{(\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}\right\}\right]_{ret}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \left[\vec{n}\wedge\vec{E}\right]_{ret}.$$

Hierin is $\vec{n}$ de eenheidsvektor $\frac{\vec{R}}{R}$, $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{q}}}{c}\left(= \frac{\vec{v}}{c}\right)$, waarin $\vec{v}$ de snelheid van het deeltje, $\kappa = 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}$. In bovenstaande resultaten moeten we alle grootheden nemen op de geretardeerde tijd. We zien dat we het veld kunnen opvatten als een som van twee termen, de eerste hangt niet van de versnelling af en gaat met $\frac{1}{R^2}$, de 2[e] is alleen aanwezig als er een versnelling van het deeltje is en gaat met $\frac{1}{R}$, dus neemt langzamer met de afstand af. Laten we beide termen afzonderlijk bekijken:

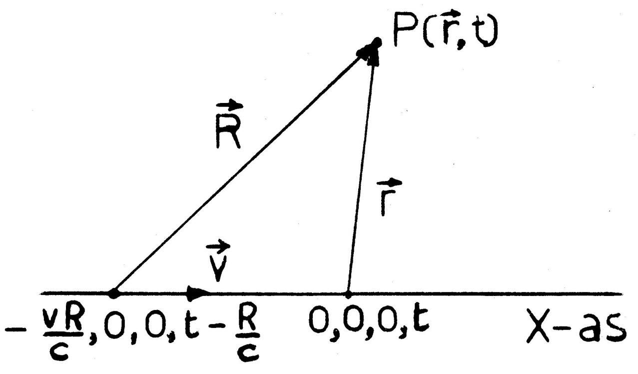
Voor $\dot{\vec{\beta}} = 0$ hebben we

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = e\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right]_{ret}$$

(22)

$$\vec{B}_1(\vec{r},t) = \vec{n} \wedge \vec{E}_1 = \vec{\beta} \wedge \vec{E}_1 = e\left[\frac{(\vec{\beta} \wedge \vec{n})(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right]_{ret} .$$

Bekijken we onderstaande figuur voor een eenparige rechtlijnige beweging; dan zien we dat we ook kunnen schrijven:



$\vec{E}_1(\vec{r},t) = e\,\frac{(1-\beta^2)\vec{r}}{\kappa^3 R^3}$, als het elektron juist op t in de oorsprong is gekomen. In die zin is $\vec{E}_1$ radieel gericht.

$\vec{E}_1$ is het veld dat voor $\beta \ll 1$ overgaat in het Coulombveld en wat $\vec{B}$ betreft in het magneetveld volgens Biot en Savart. U weet dat het op eenvoudige wijze door een Lorentztransformatie uit het Coulombveld van een stilstaande lading kan worden gevonden.

Voor $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$ is de 2[e] term interessanter. Hij overheerst op grote afstand (zg. golfzone) en geeft aanleiding tot uitstraling van elektromagnetische energie.

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{n}}{\varkappa^3 R} \wedge \{(\vec{n}-\vec{\beta}) \wedge \dot{\vec{\beta}}\}\right]_{ret}$$

(23)

$$\vec{B}_2(\vec{r},t) = \vec{n} \wedge \vec{E}_2(\vec{r},t).$$

We zien dat zowel $\vec{E}_2$ als $\vec{B}_2$ transversaal gericht zijn ($\perp \vec{n}$) en bovendien loodrecht op elkaar staan. Verder zijn ze in grootte gelijk. $\vec{E}_2$, $\vec{B}_2$, $\vec{n}$ vormen een rechts stelsel. Voor een versnelde rechtlijnige beweging (bv. harmonische oscillator) is $\vec{\beta} \,/\!/\, \dot{\vec{\beta}}$ en kunnen we vereenvoudigen:

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})}{\varkappa^3 R}\right]_{ret} .$$

Als θ de hoek is tussen $\vec{n}$ en $\vec{\beta}$ (of $\dot{\vec{\beta}}$) wordt $\varkappa = 1 - \beta \cos\theta$ en we krijgen:

$$|\vec{E}_2| = |\vec{B}_2| = \left[\frac{e\dot{\beta}\sin\theta}{cR(1-\beta\cos\theta)^3}\right]_{ret} .$$

De vektor van Poynting die de uitgezonden energiestroom levert is gericht langs $\vec{n}$ (of $\vec{R}$) en

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}\left[\frac{e^2\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{c^2R^2(1-\beta\cos\theta)^6}\right]_{ret} .$$

Laten we nu eens specialiseren op het geval $\beta \ll 1$, dus op een niet-relativistische beweging. In dat geval geldt, ook als de beweging niet-rechtlijnig is: ($\varkappa \sim 1$)

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \frac{e}{c}\left[\frac{\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \dot{\vec{\beta}})}{R}\right]_{ret}$$

, dwz. alleen de component van de versnelling loodrecht op de richting naar de waarnemer geeft een bijdrage tot het veld. Bovendien zien we dat straling gepolariseerd is in het vlak door $\vec{n}$ en $\dot{\vec{\beta}}$. Als θ de hoek is tussen $\vec{n}$ en $\dot{\vec{\beta}}$ wordt:

(24) $$\vec{S} = \left[\vec{n}\,\frac{e^2}{4\pi c}\,\frac{\dot{\beta}^2\sin^2\theta}{R^2}\right]_{ret}$$

. Hier verandert de geretardeerde tijd nog steeds gedurende de beweging.

Onderstel nu eens dat het deeltje beweegt in een klein gebiedje, waarvan de afmetingen klein zijn vergeleken met de golflengten die

voorkomen. Denk bv. aan een elektron dat in een atoom of molekuul beweegt (klassiek beschouwd). Kies ergens in dit gebiedje de oorsprong van het coördinatenstelsel. Dan kunnen we voor $\vec{R}$ bij benadering de vaste vektor $\vec{r}$ nemen. We nemen dus een vaste retardatietijd, gemeten door de afstand van O tot P. We verwaarlozen daarbij het verschil in retardatie over het gebiedje waarin de lading beweegt. Men spreekt dan van <u>dipoolbenadering</u>.

We vinden dan voor de instantaan uitgestraalde energie per ruimtehoek dΩ per sec

(25) $$\frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\dot{v}^2\right]_{ret} \sin^2\theta \, d\Omega$$

en voor de over alle richtingen geïntegreerde uitgestraalde energie per seconde

(26) $$\frac{2e^2}{3c^3}\left[\dot{v}^2\right]_{ret} .$$

Dit is de bekende formule van <u>Larmor</u> voor de uitstraling van een niet-relativistisch versneld deeltje. Dit eenvoudige resultaat hadden we ook wel simpeler kunnen afleiden, als we van het begin af de benadering $\beta \ll 1$ en de dipoolbenadering gemaakt hadden. (Vgl. Jackson Ch.9 of het dictaat Elektromagnetische eigenschappen der materie.)

Neem eens speciaal het geval van een harmonische oscillator, het klassieke model van een lichtbron:

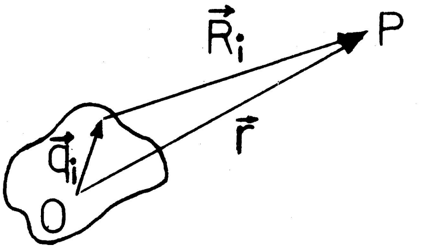
$eq = p \cos \omega t$, p is de amplitude van het dipoolmoment.

$e\ddot{q} = - \omega^2 p \cos \omega t.$

Totale uitstraling per sec: $\frac{2p^2}{3c^3}\omega^4 \cos^2 \omega(t - \frac{r}{c})$ en als we dit middelen over één periode:

$$\frac{p^2\omega^4}{3c^3} .$$

We kunnen de boven verkregen resultaten uitbreiden tot de uitstraling van een willekeurig, maar klein, systeem van bewegende puntladingen. Strikt genomen heeft elk deeltje zijn eigen geretardeerde tijd. In dipoolbenadering vervangen we deze alle door de vaste retardatietijd $t - \frac{r}{c}$. Voor kleine, niet-relativistische snelheden vinden we dan:



$$\vec{E}_2 = \left[\frac{\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \ddot{\vec{Z}})}{c^2 r^3}\right]_{ret}$$

$$\vec{B} = \left[\frac{-(r \wedge \ddot{\vec{Z}})}{c^2 r^2}\right]_{ret}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\frac{\vec{r}}{r^3}\, \ddot{Z}^2 \sin^2\theta\right]_{ret}$$

waarin $\vec{Z} = \sum_i e_i \vec{q}_i$, de zg. vektor van Hertz en θ de hoek tussen $\vec{r}$ en $\ddot{\vec{Z}}$. De totaal uitgestraalde energie per sec wordt

$$\left[\frac{2\ddot{Z}^2}{3c^3}\right]_{ret} .$$

Wil men de volgende orde in $\beta = \frac{v}{c}$ hebben, dan mag men het verschil in retardatietijd binnen het systeem niet verwaarlozen. We krijgen dan ook zg. quadrupool- en magnetische dipoolstraling.

Stralingsdemping en lijnbreedte.

De uitgestraalde energie zal hetzij aan de mechanische energie der bewegende ladingen worden onttrokken, hetzij door de krachten die de ladingen doen bewegen (bv. een lichtgolf die op een atoom valt) moeten worden geleverd.

Het is dus niet juist de beweging uitsluitend te bepalen uit de uitwendige krachten. Men mag dus zelfs bij een enkele lading de beweging niet als gegeven beschouwen en de daaruit voortvloeiende uitstraling berekenen. Strikt genomen moet ook de reactie van het veld

door de lading geproduceerd op zijn eigen beweging in rekening worden gebracht. Er zal een dempingskracht $\vec{K}_s$ optreden. Voor een periodieke beweging moet de arbeid door deze kracht verricht tussen twee tijdstippen dat de bewegingstoestand dezelfde is, gelijk zijn aan minus de uitstraling.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{K}_s \cdot \vec{v})\, dt = + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\vec{v}} \cdot v)\, dt \,.$$

Hieraan is voldaan als $\vec{K}_s = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{v}}$.

Tot dezelfde uitdrukking komt men op een meer fundamentele manier (het eerst door Lorentz gedaan) als men, met de retardatie rekening houdend, de zg. zelfkracht uitrekent, de kracht die de delen van het elektron op elkaar uitoefenen. Behalve deze dempingskracht, die onafhankelijk is van de ladingsverdeling in het elektron treedt nog een zelfkracht op die evenredig is met de versnelling en die voor een puntlading oneindig wordt. Hier raken we aan moeilijkheden verbonden aan de struktuur van elementaire deeltjes (renormalisatie, vgl. Jackson Ch.17).

Voor een harmonisch trillend elektron wordt nu de bewegingsvergelijking

$$m\ddot{x} - \frac{2e^2}{3c^3} \dddot{x} + m\omega_o^2 x = eE \,.$$

Deze bewegingsvgl. van Lorentz (en Dirac) leidt tot moeilijkheden omdat hij zg. run-away solutions heeft (vgl. Jackson p.582, 597).

Als de frequentie niet te groot is ($\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}8.10^{-13}$ cm) is de dempingskracht klein vergeleken met de quasi-elastische kracht. In 1^e benadering is dan $\dddot{x} = -\omega_o^2 \dot{x}$. Onze vergelijking reduceert dan tot de bekende vgl. voor de gedempte harmonische oscillator:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{eE}{m} \,, \quad \text{met } \gamma = \frac{2e^2\omega_o^2}{3mc^3} \,.$$

Men noemt deze demping de <u>natuurlijke of stralingsdemping</u>.

Als $\gamma \ll \omega_o$ is de oplossing van de homogene trillingsvgl. voor $t > 0$: $x(t) = x_o e^{-\frac{1}{2}\gamma t + i\omega_o t}$. De straling die uitgestuurd wordt heeft een amplitude evenredig met $\ddot{x}$ en heeft dus dezelfde tijdsafhankelijkheid. Het gevolg is dat niet meer een zuiver monochromatische golf wordt uitgezonden, maar een spektraallijn die verbreed is.

Stel $E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$. Voor $E(t) = E_o e^{-\frac{1}{2}\gamma t + i\omega_o t}$ $(t > 0)$.

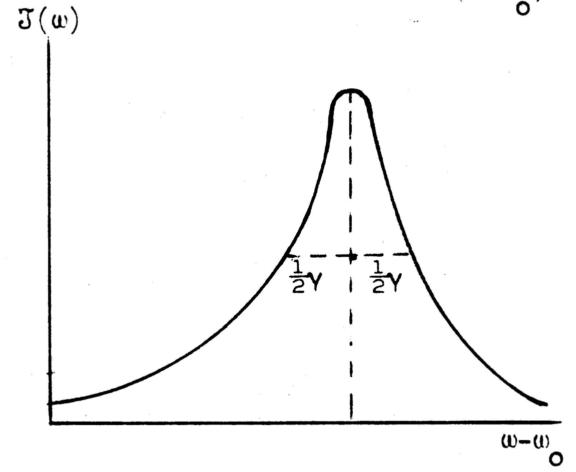
wordt dan

$$E(\omega) = \frac{E_o}{2\pi} \int^{\infty} e^{i(\omega_o - \omega)t - \frac{1}{2}\gamma t}\, dt = \frac{E_o}{2\pi} \frac{1}{i(\omega_o - \omega) - \frac{1}{2}\gamma}.$$

De intensiteitsverdeling in het spektrum is dan:

$$\mathfrak{J}(\omega) \propto |E(\omega)|^2 = I_o\, \gamma/2\pi \frac{1}{(\omega - \omega_o)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2}$$

(I_o zo gekozen dat $\int \mathfrak{J}(\omega)\, d\omega = I_o$).



Dit is een zg. Lorentz-lijnvorm. γ is de breedte op halve hoogte en heet met bovenvermelde waarde de natuurlijke lijnbreedte. In golflengteschaal is de lijnbreedte: $\left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}\right)$.

$$\Delta\lambda = 2\pi c \frac{\Delta\omega_o}{\omega_o^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{mc^2} = 1{,}17 . 10^{-4}\,\text{Å}.$$

Volgens deze klassieke theorie is de natuurlijke lijnbreedte onafhankelijk van de golflengte en heeft de vermelde vaste waarde.

5. Verstrooiing van elektromagnetische straling.

a) Verstrooiing door vrije elektronen. Formule van J.J. Thomson.

Laat een monochromatische elektromagnetische golf vallen op een vrij elektron. De bewegingsvgl.luidt dan:

$$m\ddot{x} = e\, E_o \cos(\omega t + \delta).$$

Hierin zijn een aantal benaderingen gemaakt:

1° $v \ll c$. Dan kan de magnetische kracht worden verwaarloosd.

2° amplitude $\ll \lambda$. (dan $E(x,t) \sim E(0,t)$)

3° demping verwaarloosd.

Nemen we de gemiddelde positie in rust dan wordt:

$$x(t) = -\frac{eE_o}{m\omega^2}\cos(\omega t+\delta).$$

Stel Θ is de hoek tussen de richting van uitstraling en de trillingsrichting van de invallende (gepolariseerde) straling. Dan is de uitgestraalde (verstrooide) energie per sec op afstand r gemiddeld over de tijd volgens (25):

$$\mathfrak{J} = \frac{e^2 \sin^2\Theta\, \overline{\ddot{x}^2}}{4\pi c^3 r^2} = \frac{e^4 \sin^2\Theta\, E_o^2}{8\pi m^2 c^3 r^2}.$$

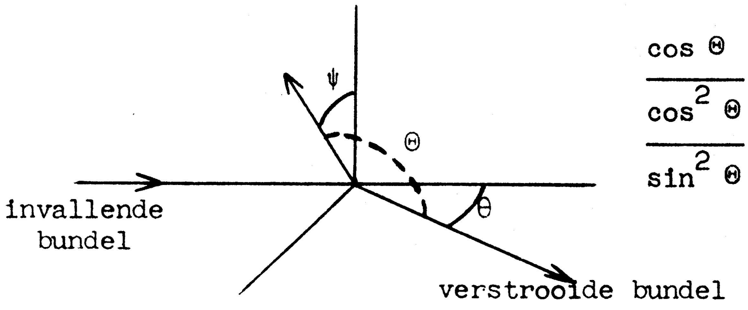
De intensiteit van de invallende straling per sec is $\mathfrak{J}_o = \frac{cE_o^2}{8\pi}$.

Voor gepolariseerde invallende straling is dus:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_o \frac{\sigma(\Theta)}{r^2} \quad \text{met} \quad \sigma(\Theta) = r_o^2 \sin^2\Theta \qquad r_o = \frac{e^2}{mc^2}.$$

$\sigma(\Theta)$ heet de differentiële werkzame doorsnede voor verstrooiing.

Laat nu de invallende golf niet gepolariseerd zijn, dan moeten we nog middelen over de hoek ψ. Noemen we nu θ de verstrooiingshoek, dan is



$$\cos\Theta = \sin\theta \sin\psi$$

$$\overline{\cos^2\Theta} = \tfrac{1}{2}\sin^2\theta$$

$$\overline{\sin^2\Theta} = \tfrac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

Nu vinden we: $\sigma(\theta) = \frac{1}{2} r_o^2 (1+\cos^2\theta)$.

Na integratie over alle richtingen:

$$\sigma_{totaal} = \frac{8\pi}{3} r_o^2.$$

Dit zijn de formules van J.J. Thomson voor de verstrooiing van elektromagnetische straling (bv. röntgenstralen) door vrije elektronen.

b) Verstrooiing door elastisch gebonden elektronen.

Voor een elastisch gebonden elektron (demping meegenomen) vinden we net als boven voor gepolariseerde invallende golf:

$$\sigma(\Theta) = r_o^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \Theta}{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} .$$

Als $\omega_o \to 0$ en $\gamma \ll \omega$ krijgen we hieruit de formule onder a) terug.

Na middelen over de polarisatie vinden we:

$$\sigma_{totaal} = \frac{8\pi}{3} r_o^2 \frac{\omega^4}{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} .$$

Als $\omega \ll \omega_o$ wordt $\sigma_{totaal} \propto \omega^4$. Dit verklaart de blauwe kleur des hemels (Lord Rayleigh).

Als $\omega \sim \omega_o$ hebben we zg. resonantiefluorescentie met

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} r_o^2 \frac{\omega_o^2}{(\omega_o-\omega)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} .$$

Hoofdstuk IV Relativistisch covariante schrijfwijze der Maxwell-vergelijkingen.

We kunnen dit hoofdstuk heel kort houden, omdat relativiteitstheorie en in het bijzonder het onderwerp van dit hoofdstuk reeds uitvoerig behandeld is in het college Lorentz-invariantie van Dr. Hooyman. Ik zal slechts enkele hoofdzaken nog even resumeren, een enkel nieuw punt bespreken en voor het overige (en voor bewijzen) verwijzen naar dit college.

Volgens de postulaten van de speciale relativiteitstheorie hebben de natuurwetten dezelfde vorm in alle inertiaalstelsels, dwz. dat waarnemers die eenparig t.o.v. elkaar bewegen geen onderscheid vinden in het verloop van de natuurverschijnselen. In het bijzonder is de lichtsnelheid in vakuum c dezelfde voor al zulke waarnemers. Noemt men coördinaten en tijd in stelsel $S(x,y,z,t)$ en in een eenparig t.o.v. S bewogen stelsel $S'(x',y',z',t')$, dan kan men concluderen (zie "Lorentz-invariantie") dat

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 .$$

Ondersteld is dat $x' = y' = z' = t' = 0$ correspondeert met $x = y = z = t = 0$.

Voeren we in de 4-dimensionale Minkowski-ruimte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ dan moet $\sum_\mu x_\mu^2 = \sum_\mu x'^2_\mu$.

De lineaire transformatie die leidt van x_μ naar x'_μ is dus een orthogonale transformatie in deze ruimte

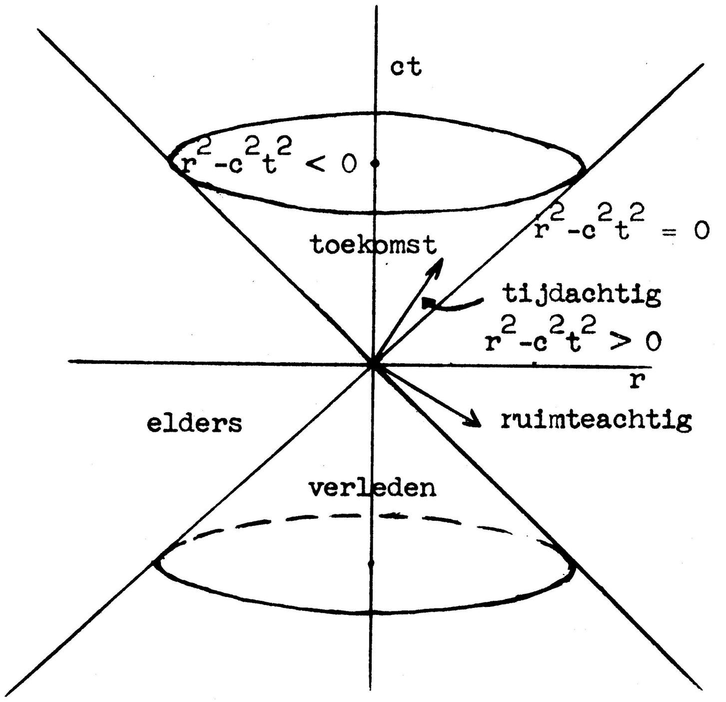
$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu}x_\nu \quad \text{met} \quad \sum_\lambda a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} .$$

Nu zijn x_1,x_2,x_3 reëel en x_4 zuiver imaginair. Deze realiteitseigenschap moet na transformatie behouden blijven. Hieruit volgt $a_{ik}(i,k = 1,2,3)$ reëel en a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43} zuiver imaginair en a_{44} weer reëel.

Deze transformaties vormen een groep, ook het genoemde realiteitskarakter blijft bij vermenigvuldiging behouden. Het is de Lorentz-groep, de groep van Lorentz-transformaties. We hebben nog $a_{44}^2 \geq 1$, dus $a_{44} \geq 1$ of $a_{44} \leq -1$.

De L.T. met $a_{44} \geq 1$ noemt men orthochroon, die met $a_{44} \leq -1$ keren de tijd om ($ict' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}ict$. Bekijk 2 gebeurtenissen op dezelfde plaats in S. Dan is $ic(t_1'-t_2') = a_{44}ic(t_1-t_2)$).

De L.T. met $a_{44} \geq 1$ en det $a_{\mu\nu} = +1$ vormen een ondergroep van de Lorentz-groep, de groep van de eigenlijke Lorentztransformaties.



De zg. lichtkegel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 = 0$ is invariant voor L.T. Een 4-vektor v_μ vanuit de oorsprong uitgezet die binnen de lichtkegel eindigt heet tijdachtig ($v_\mu^2 < 0$), die buiten de lichtkegel eindigt ruimteachtig ($v_\mu^2 > 0$). Bij eigenlijke L.T. gaat een punt in de voorwaartse lichtkegel over in een punt in de voorwaartse lichtkegel (toekomst $t > 0$), analoog voor achterwaartse lichtkegel ($t < 0$). Een punt binnen de lichtkegel kan door een L.T. getransformeerd worden naar $x_1' = x_2' = x_3' = 0$, dit punt kan causaal met de oorsprong samenhangen. Een punt buiten de lichtkegel, in "elders", kan getransformeerd worden naar $t' = 0$, kan niet causaal met de oorsprong samenhangen. (Hier kan in één stelsel $t > 0$ en na een eigenlijke L.T. toch $t' < 0$.) Vgl. de figuur.

Een ondergroep van de eigenlijke L.T. zijn de gewone 3-dimensionale draaiingen. Tot de eigenlijke L.T. behoren ook de zg. zuivere L.T. waarbij 2 onderling parallelle 3-dimensionale coördinatenstelsels met eenparige snelheid $\vec{v}$ t.o.v. elkaar bewegen. Kiezen we $\vec{v}$ langs de x-as,dan is

(1) $$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{of} \quad a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

met $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Uit deze vgl. concludeert men zoals bekend tot de relativiteit van de gelijktijdigheid, tot de verkorting der meetstaven, tot de tijddilatatie en tot het additietheorema van snelheden.

Ook t.a.v. Lorentz-transformaties kunnen we spreken van skalairen, 4-vektoren (die net als de x_μ transformeren), tensoren, etc. We kunnen de vgl. van het elektromagnetisme in 4-dimensionale vektorvorm schrijven, zodat linker- en rechterlid dezelfde transformatie eigenschappen t.a.v. L.T. hebben. We zeggen dat we ze dan in covariante vorm hebben geschreven. Dan zien we expliciet dat ze dezelfde vorm hebben voor waarnemers die eenparig t.o.v. elkaar bewegen. Bovendien weten we dan meteen hoe de verschillende grootheden bij L.T.transformeren.

We bekijken de 4-vektor $j_\mu(j_1,j_2,j_3,ic\rho)$. De continuïteitsvgl. luidt $\sum_\mu \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$. Omgekeerd willen we ladingsbehoud in ieder stelsel dan moet j_μ een 4-vektor zijn. In Lorentz-ijking luiden de vgl. voor de potentialen: $\Box A_\mu = -\frac{4\pi}{c} j_\mu$, waarin $A_\mu = (A_1,A_2,A_3,i\varphi)$.

De Lorentz-conditie is: $\sum_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$.

Nu de velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$, waarbij $\vec{E} = -\,\text{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}$, $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$.

In termen van A_μ, is

$$E_x = i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) \qquad B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$E_y = i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) \qquad B_y = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$$E_z = i\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) \qquad B_z = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

We voeren nu in de antisymmetrische tensor:

$$(2) \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

De elektrische en magnetische veldsterkten zijn geen onafhankelijke grootheden, maar zijn in een tensor verenigd. De componenten zullen gemengd transformeren. Bij de zuivere L.T. van de vorige blz. bv. vinden we: $\left(F'_{\mu\nu} = \sum_{\lambda\sigma} a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\sigma}\, F_{\lambda\sigma}\right)$

$$(3) \qquad \begin{aligned} B'_x &= B_x & E'_x &= E_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) & E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y)\,. \end{aligned}$$

Bekijken we bv. de beweging van een elektron in een "stilstaand" H-atoom. In het laboratoriumstelsel S werkt op het elektron alleen een elektrisch (Coulomb) veld; we zien dat dan in het rustsysteem van het elektron S' ook een magneetveld heerst, dat op het magnetisch moment van het elektron werkt. Dit geeft in het H-atoom aanleiding tot de zg. spin-baan koppeling.

$E_1 = \frac{\gamma q b}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}$ $B_2 = \beta E_1$

$E_3 = -q\gamma vt$

<u>Opgave</u>: Bereken door L.T. hetzij van de potentialen, hetzij van de veldsterkten het elektromagnetisch veld van een eenparig bewegend elektron. In het rustsysteem van het elektron is alleen een Coulomb-veld. Vergelijk het resultaat met $\vec{E}_1$, $\vec{B}_1$ berekend in Hoofdstuk III, §4.

We kunnen ook de Maxwell-vgl. zelf covariant opschrijven:

De vgl. $\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$ en $\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{1}{c}\dot{\vec{E}}$ kunnen we samenvatten tot:

(4) $\quad \sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu \quad (\mu = 1,2,3,4)$ of ook: $\text{Div}\,\vec{\vec{F}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Beide leden transformeren als een 4-vektor.

De andere Maxwell-vgl. (Maxwell-Faraday) $\text{div}\,\vec{B} = 0$ en $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ worden geschreven als:

(5) $\quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0.$

Dit zijn 4 vergelijkingen: μ,ν,λ kunnen zijn 1,2,3; 2,3,4; 3,4,1 en 4,1,2. (1,2,3 geeft dan $\text{div}\,\vec{B} = 0$). Aan de vgl. (5) is automatisch voldaan door $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$.

Voor de <u>krachtdichtheid</u> hadden we: $\vec{k} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\wedge\vec{B}$.

of: $k_x = \frac{1}{c}\left(j_2F_{12} + j_3F_{13} + j_4F_{14}\right)$.
etc.

Dit zijn de 3 ruimtecomponenten van een 4-vektor

(6) $\quad k_\mu = \frac{1}{c}\sum_\nu F_{\mu\nu}\, j_\nu .$

Door invullen blijkt dat $k_4 = \frac{1}{c}\left(F_{41}j_1 + F_{42}j_2 + F_{43}j_3\right) = \frac{i}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)$, d.i. op de faktor $\frac{i}{c}$ na de door het veld per sec en per volume-eenheid op de ladingen verrichte arbeid. (overdracht van energie, zoals $\mu = 1,2,3$ in (6) overdracht van impuls beschrijft). Merk op dat

$\sum_\mu k_\mu j_\mu = \frac{1}{c}\sum_{\mu\nu} F_{\mu\nu}j_\mu j_\nu \equiv 0$ omdat $F_{\mu\nu}$ anti-symmetrisch is. Het is ook direct duidelijk als men deze invariante uitdrukking berekent in het rustsysteem van de lading.

We zullen tenslotte de behoudswetten van energie en impuls (vgl. III §3) nog samen covariant schrijven. We hebben:

$$k_\mu = \frac{1}{c}\sum_\nu F_{\mu\nu}\, j_\nu = \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu\lambda} F_{\mu\nu}\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(F_{\mu\nu}F_{\nu\lambda}\right) - \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}.$$

Nu is(gebruikmakend van (5)):

$$\sum_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \sum_{\nu\lambda} F_{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum_{\nu\lambda} F_{\nu\lambda}\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = -\tfrac{1}{4}\sum_{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(F_{\nu\lambda}\right)^2.$$

We kunnen nu schrijven:

$$(7)\quad k_\mu = \sum_\nu \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad \text{met } T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\sum_\sigma F_{\mu\sigma}F_{\sigma\nu} + \frac{1}{16\pi}\,\delta_{\mu\nu}\sum_{\lambda\sigma}\left(F_{\lambda\sigma}\right)^2.$$

Daar $F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch is, is $T_{\mu\nu}$ symmetrisch. Hij heet de energie-impulstensor van het elektromagnetisch veld. Bedenken we dat $\frac{1}{16\pi}\sum_{\lambda\sigma}\left(F_{\lambda\sigma}\right)^2 = \frac{1}{8\pi}(B^2-E^2)$, dan verifieert men dat:

$$(8)\qquad T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} & -icw_x \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} & -icw_y \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} & -icw_z \\ -\frac{i}{c}S_x & -\frac{i}{c}S_y & -\frac{i}{c}S_z & W \end{pmatrix}$$

Hierin is T_{ik} de spanningstensor van Maxwell gedefinieerd in III, §3.
$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E}\wedge\vec{B})$ is de vektor van Poynting (energiestroomdichtheid).
$W = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$ is de energiedichtheid, $\vec{w} = \frac{1}{4\pi c}(\vec{E}\wedge\vec{B})$ de impulsdichtheid van het elektromagnetisch veld.
(7) vat de vroeger behandelde behoudswetten van energie en impuls (III(18) en (20)) samen.

Bekijken we nog even een puntlading e (elektron), die een baan beschrijft gegeven door $\vec{q}(t)$. We hebben dan (vgl. III §5):

$\rho(\vec{r},t) = e\ \delta(\vec{r}-\vec{q}(t))$, $\vec{j}(\vec{r},t) = e\dot{\vec{q}}(t)\ \delta(\vec{r}-\vec{q}(t))$. De 4-vektor j_μ wordt dan gegeven door: $j_\mu = e\ \frac{dq_\mu}{dt}\ \delta(\vec{r}-\vec{q}(t))$, waarin $q_\mu = q_1, q_2, q_3, ict$.

De krachtdichtheid was gegeven door (6): $k_\mu = \frac{1}{c} \sum_\nu F_{\mu\nu}\ j_\nu$. Integreren we dit over het volume van het elektron, dan vinden we voor de kracht op het elektron:

$$K_\mu = \int k_\mu d\vec{r} = \frac{e}{c} \sum_\nu F_{\mu\nu}\ (\vec{q}(t),t)\ \frac{dq_\nu}{dt}$$ ($F_{\mu\nu}$ ter plaatse van het elektron).

Voor $\mu = 1,2,3$ staat hier:

$\vec{K} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}\ \vec{v} \wedge \vec{B})$, de Lorentzkracht zoals het behoort.

$K_4 = \frac{i}{c}\ e(\vec{E}\cdot\vec{v})$, op faktor $\frac{i}{c}$ na de arbeid door het veld per sec op het elektron verricht.

Men merke op dat K_μ, zoals hier ingevoerd, géén 4-vektor is.

Tenslotte herinner ik er aan, dat als we invoeren de 4-impuls

(9) $$p_\mu = \left(\frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{im_oc}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

de bewegingsvgl. voor een elektron in een elektromagnetisch veld geschreven kan worden:

(10) $$\frac{dp_\mu}{dt} = K_\mu .$$

Voor $\mu = 1,2,3$ staat hier: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\ \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

Voor $\mu = 4$:

$\frac{i}{c}\frac{dT}{dt} = \frac{i}{c}\ e(\vec{E}\cdot\vec{v})$ met $T = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (kinetische energie inclusief rustenergie).

De vgl. (10) zijn niet expliciet covariant geschreven (linker- en rechterlid zijn geen 4-vektoren), toch gelden ze in elk Lorentz-frame (inertiaalstelsel).

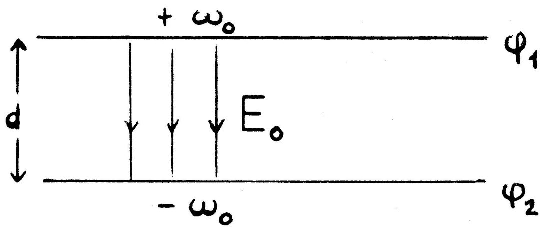
Dat voor een monochromatische elektromagnetische golf de fasefaktor $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ invariant is voor L.T. en dat dus $k_1, k_2, k_3, \frac{i\omega}{c}$ als een viervektor transformeren, is ook op het college Lorentzinvariantie behandeld. Enkele conclusies die hier onmiddellijk uit

volgen zijn Doppler-effect (longitudinaal en transversaal), aberratie van het licht, reflectie aan bewegende spiegel.

Hoofdstuk V Het elektromagnetisch veld in een medium.

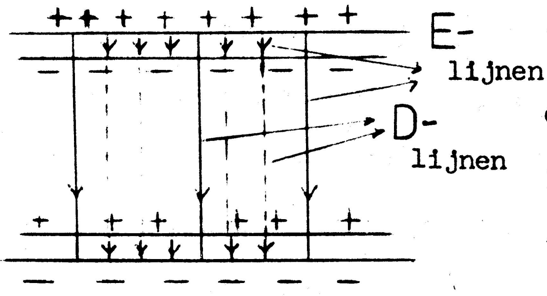
1. Het elektrostatisch veld in een diëlektrisch medium.

Tot dusver hebben we slechts het elektromagnetisch veld in vakuum beschouwd, dat veroorzaakt werd door gegeven ladingen en stromen. Voor de velden in een medium moeten de Maxwell-vgl. gegeneraliseerd worden. Kijken we eerst nog eens naar het eenvoudige geval van één vlakke plaatcondensator. Afgezien van randeffecten heerst er een homogeen veld $E_o = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$, waarbij φ_1 en φ_2 de potentialen van de beide platen zijn. Op de platen bevindt zich een oppervlaktelading per cm^2 $+\omega_o$, respectievelijk $-\omega_o$, waarbij $4\pi\omega_o = E_o = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$.



De capaciteit $C = \frac{\text{lading}}{\text{potentiaalverschil}} = \frac{O\omega_o}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{O}{4\pi d}$. (O is het oppervlak van een plaat, d de afstand tussen de platen). Faraday ontdekte dat de capaciteit met een factor ϵ toeneemt als de ruimte tussen de platen gevuld wordt met één of andere isolerende stof (diëlektricum), waarbij ϵ een karakteristieke constante is voor zo'n stof. Dit betekent dat als we $\varphi_1 - \varphi_2$ constant houden, de lading van de platen met een factor ϵ toeneemt, òf als we de lading constant laten (platen isoleren), dat het potentiaalverschil met de factor ϵ daalt.

In het eerste geval wordt de oppervlakte-ladingsdichtheid ω met $4\pi\omega = \epsilon E_o$. Voor iedere cm^2 van de plaat moet dus een lading $\omega - \omega_o = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_o$ worden aangevuld. Denken we ons nu een smalle spleet tussen plaat en diëlektricum, waarvan de dikte te verwaarlozen is.



In de isolator heerst nog de oude veldsterkte E_o, want $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{ds} = E_o d$ is gelijk gebleven. In de spleet heerst echter de veldsterkte $E' = 4\pi\omega = \epsilon E_o$. Van spleet naar medium springt de veldsterkte van ϵE_o naar E_o, dwz. het diëltktricum krijgt een oppervlakteladingsdichtheid ω' met $4\pi\omega' = (\epsilon-1)\,\vec{E}_o \cdot \vec{n}$ ($\vec{n}$ is normaal naar buiten, dus aan bovenkant een negatieve ω'). Men noemt dit een <u>polarisatielading</u>, in tegenstelling tot de <u>ware (of vrije</u>) lading op de platen. De polarisatielading is niet direkt meetbaar, wel het er door veroorzaakte veld. Hij kan zich ook niet door geleiding verplaatsen, maar zit aan de materie vast.

De elektrostatische grondvgl. rot $\vec{E} = 0$, div $\vec{E} = 4\pi\rho$ kunnen we handhaven als we onder ρ verstaan de dichtheid van ware lading + polarisatielading. We willen in de vgl. echter alleen de meetbare ware lading hebben. We voeren derhalve 2 vektoren in $\vec{E}$ en $\vec{D}$, met in een isotroop diëlektricum $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. We hebben nu enerzijds rot $\vec{E} = 0$, anderzijds div $\vec{D} = 4\pi\rho_w$, waarin ρ_w alleen de ware ladingsdichtheid voorstelt. $\vec{D}$ heet de <u>diëlektrische verplaatsing</u> of <u>verschuiving</u>. $\vec{D}$ heeft tot bronnen de ware ladingen, $\vec{E}$ de ware + polarisatieladingen. Voor het veld $\vec{E}$ in het medium wordt bij de condensator een deel van de (toegenomen) ware lading gecompenseerd door de polarisatielading, waardoor $E = E_o$ blijft.

Uit de vgl. rot $\vec{E} = 0$, div $\vec{D} = 4\pi\rho_w$ volgt op de bekende wijze (vgl. Hoofdstuk I) dat aan het grensvlak van 2 media E_{tg} continu is en D_n ook (of algemener: de sprong in D_n is $4\pi\omega_w$ als er een ware oppervlaktelading aanwezig is). De sprong in E_n is echter $4\pi(\omega_w + \omega_{pol})$. Dit hebben we ook juist bij de condensator gezien.

De eigenschap van een diëlektrisch medium om het veld te beinvloeden is een gevolg van zijn polarisatie: in een elektrisch veld wordt de materie (de atomen) gepolariseerd. Ieder atoom of molekuul wordt tengevolge van de relatieve verplaatsing (in een elektrisch veld) van negatieve en positieve lading een dipooltje met dipoolmoment evenredig met het veld ter plaatse. Bovendien kunnen permanente dipolen aanwezig zijn (men spreekt dan van polaire stoffen), die zich in een veld gaan richten. Zonder veld zullen ze in een isotroop medium willekeurig georiënteerd zijn. In een veld geven deze permanente dipolen ook een (temperatuur-afhankelijke) bijdrage tot de polarisatie, men spreekt wel van paraelektrische polarisatie (denk ook aan paramagnetisme).

We voeren nu in de polarisatiedichtheid $\vec{P}$, d.i. het dipoolmoment per volumeeenheid, dat nog van de plaats $\vec{r}$ kan afhangen. Daar de potentiaal van een dipool $\vec{\mu}$ op afstand $\vec{r}$ gegeven wordt door

$$\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\,\vec{\mu}\cdot\text{grad}\,\frac{1}{r},$$

wordt de potentiaal in $\vec{r}$ door een gepolariseerd medium met polarisatiedichtheid $\vec{P}(\vec{r}\,')$ gegeven door:

$$\varphi(\vec{r}) = -\int \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,' = \int \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\nabla_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,' =$$

(1) $$= \int \nabla_{r'}\cdot\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,' - \int \frac{\nabla_{r'}\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,' =$$

$$= \oint \frac{\vec{P}\cdot d\vec{o}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \int \frac{\text{div}\,\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,'\,.$$

De potentiaal afkomstig van een gepolariseerd medium is dezelfde alsof het medium een oppervlakteladingsdichtheid P_n heeft op zijn begrenzing en een ruimtelijke ladingsdichtheid $-\,\text{div}\,\vec{P}$. Bij constante polarisatiedichtheid zoals in een vlakke plaatcondensator ontbreekt uiteraard de laatste term.

Om de totale potentiaal te krijgen moeten we die veroorzaakt door

de ware (vrije) ladingen bij (1) optellen.

We vinden zo dat rot $\vec{E} = 0$ en div $\vec{E} = 4\pi\rho_w - 4\pi$ div $\vec{P}$.
Als we nu invoeren $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ krijgen we als grondvgl. van de elektrostatica in een medium:

(2) $$\text{rot}\,\vec{E} = 0, \qquad \text{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho_w .$$

Nu blijkt dat er meestal een eenvoudig lineair verband bestaat tussen $\vec{P}$ en $\vec{E}$ en dus ook tussen $\vec{D}$ en $\vec{E}$. In een isotroop medium is $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ of $\vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\,\vec{E} \equiv \chi\vec{E}$ (χ heet de diëlektrische susceptibiliteit).

In het bovenstaande zijn we op een min of meer heuristische wijze gekomen tot de elektrostatische veldvgl. in een medium. Het is echter mogelijk om deze vgl. (en ook de veel algemenere Maxwell-vergelijkingen in een medium) op systematische wijze af te leiden uit de reeds behandelde voor het vakuum. Dit is het eerst gedaan door Lorentz (vgl. voor een zorgvuldige beschrijving het genoemde boekje van Rosenfeld), die uitging van de mikroscopische velden in vakuum en hieruit door middeling over kleine ruimte- en tijdgebiedjes de makroscopische vgl. in een medium verkreeg. Men kan het middelingsproces ook uitvoeren volgens de algemene methoden der statistische mechanica door te middelen met behulp van een ensemble.

Wat is het probleem? Als we alle atoomkernen en elektronen als ladings- en stroombronnen beschouwen voldoen de hierdoor veroorzaakte velden aan de bekende vgl. zoals die in vakuum gelden: (vgl. Hfdst. II).

(3) $$\begin{aligned} \text{div}\,\vec{e} &= 4\pi\rho \\ \text{rot}\,\vec{e} &= -\frac{1}{c}\dot{\vec{b}} \\ \text{div}\,\vec{b} &= 0 \\ \text{rot}\,\vec{b} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\dot{\vec{e}} \end{aligned}$$

We schrijven kleine letters voor de velden. De vgl. zijn de zg. mikroscopische vgl. voor de mikroscopische velden, die uiterst snel fluctueren in tijd en plaats, van atoom tot atoom en zelfs in de atomen. ρ bv. is de mikroscopische ladingsdichtheid:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i e_i\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

waarbij gesommeerd wordt over alle ladingen (kernen en elektronen). Deze velden zijn onbruikbaar voor een makroscopische beschrijving. Daarnaast hebben we de makroscopische Maxwell-vgl. in media:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho_w \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_w + \frac{1}{c}\dot{\vec{D}} \end{aligned}$$

Hier werken we met 4 velden, die langzaam variëren in ruimte en tijd en die in principe toegankelijk zijn voor metingen.

De bewering is nu (we zullen dit hier niet bewijzen, voor het geval van elektrostatica kunt u een bewijs vinden in het diktaat Elektromagnetische eigenschappen der materie), dat we van (3) naar (4) kunnen komen door een middelingsproces. Daarbij blijkt dan, dat $\vec{E} = \langle\vec{e}\rangle$, $\vec{B} = \langle\vec{b}\rangle$, waarbij de haken een gemiddelde aanduiden. Verder dat $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$, waarbij $\vec{P}$ en $\vec{M}$ respectievelijk de gemiddelde elektrische en magnetische dipooldichtheden aanduiden.
Tot ρ_w en $\vec{j}_w$ dragen alleen ionen en vrije elektronen bij, neutrale atomen (ook al bezitten ze geïnduceerde of permanente elektrische of magnetische dipoolmomenten) echter niet. Een ion draagt bij tot de ware lading in een zeker volume als zijn kern in dat volume ligt en die bijdrage is dan de totale lading van het ion.

2. De diëlektrische constante.

a) Verdunde niet-polaire gassen.

In een veld $\vec{E}$ krijgt een molekuul een geïnduceerd dipoolmoment $\vec{\mu} = \alpha\vec{E}$. α heet de (statische) polariseerbaarheid en kan in principe berekend worden met behulp van quantummechanische storingsrekening. Neemt men het veld $\vec{E}$ langs de z-as, dan is de storingsterm in de hamiltoniaan $H^{(1)} = -e\,E\,\sum_i z_i$, waarin over de elektronen wordt gesommeerd. In de grondtoestand wordt het geïnduceerde dipoolmoment:
$\mu = \langle\varphi|\sum_i e_i z_i|\varphi\rangle$, waarin φ de gestoorde grondtoestand.

Hieruit volgt voor de polariseerbaarheid van het molekuul (atoom) in de grondtoestand:

$$(5) \qquad \alpha = -2E^{-2} \sum_{n\neq o} \frac{|H^{(1)}_{no}|^2}{E_o - E_n},$$

waarin E_n de energie van de n-de (ongestoorde) toestand voorstelt, 0 duidt de grondtoestand aan, $H^{(1)}_{no}$ is het matrixelement van $H^{(1)}$ tussen de ongestoorde toestanden 0 en n. Voor het H-atoom kan men dit exact uitrekenen en er komt:

$\alpha = \frac{9}{2} a_o^3$, waarin $a_o = \frac{\hbar^2}{me^2}$, de zg. straal van de 1^e Bohr-baan.

Voor ingewikkelder atomen en molekulen moet men benaderingsmethoden toepassen.

Zijn er N molekulen per cm^3, dan wordt de polarisatiedichtheid:

$$\vec{P} = N\vec{\mu} = N\alpha\vec{E} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}$$

(6) en dus $\quad \epsilon = 1 + 4\pi N\alpha.$

b) <u>Verdunde polaire gassen</u>.

Hierop heeft Debije in 1912 de klassieke theorie toegepast die Langevin reeds in 1905 voor het paramagnetisme had ontwikkeld.

Stel de molekulen hebben een permanente dipool $\vec{p}$. Deze geven een bijdrage tot de polarisatiedichtheid

$$Np\,\overline{\cos\theta},$$

waarin θ de hoek is tussen dipool en elektrisch veld. De streep duidt een middeling aan. De energie van een dipool $\vec{p}$ in een veld $\vec{E}$ is $-\vec{E}\cdot\vec{p} = -Ep\cos\theta$. We doen nu de middeling met behulp van de Boltzmann faktor $e^{\frac{Ep\cos\theta}{kT}}$. Dan wordt

$$\overline{\cos\theta} = \frac{\int\limits_0^{\pi} \cos\theta \, e^{\frac{Ep\cos\theta}{kT}} \sin\theta d\theta}{\int\limits_0^{\pi} e^{\frac{Ep\cos\theta}{kT}} \sin\theta d\theta} .$$

Noemen we ter afkorting $\frac{Ep}{kT} = a$, dan is de noemer

$\int\limits_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \sin\theta d\theta = \int\limits_{-1}^{+1} e^{ax} dx = \frac{e^{a}-e^{-a}}{a}$. De teller vinden we hieruit door naar a te differentiëren.

Men vindt zo $\overline{\cos\theta} = \mathcal{L}(a) = -\frac{1}{a} + \coth a$. ($\mathcal{L}$ heet wel de funktie van Langevin.) Alleen bij extreem hoge velden of zeer lage temperaturen zou a niet voldoen aan de conditie $a \ll 1$.

Als echter (zoals meestal het geval is) $a \ll 1$, wordt $\mathcal{L}(a) \sim \frac{a}{3}$ en we vinden dan:

$$\vec{P} = N\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right)\vec{E}$$

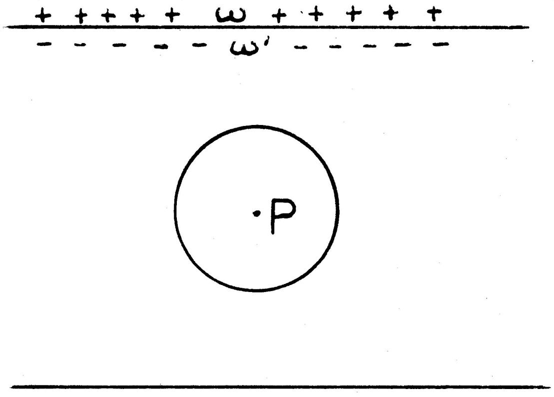
(7) $$\epsilon = 1 + 4\pi N\left(\alpha + \frac{p^2}{3kT}\right)$$ Formule van Langevin-Debije.

De bijdrage van de permanente dipolen is sterk afhankelijk van de temperatuur, neemt af bij toenemende temperatuur, zoals ook fysisch begrijpelijk is. Ook een meer exacte quantummechanische behandeling geeft voor niet te lage temperatuur eenzelfde resultaat.

c) Dichtere media.

Als de molekulen dichter opeen zitten is het niet juist om de op een molekuul werkende veldsterkte $\vec{F}$ te identificeren met het makroscopische veld $\vec{E}$ ($\vec{E}(\vec{r})$ is het gemiddelde veld ter plaatse $\vec{r}$, waartoe ook het uitgezochte molekuul bijdraagt). Men noemt $\vec{F}$ het lokale veld, ook wel eens het inwendige veld of het werkende veld. Men kan het als volgt definiëren: verwijder het molekuul nadat de ladingsverdeling in de omgeving gefixeerd is, meet de gemiddelde veldsterkte in de holte ter plaatse van het verwijderde molekuul en middel de uitkomst over de mogelijke configuraties van de omgevende molekulen.

Lorentz heeft een (benaderde) uitdrukking voor $\vec{F}$ gegeven, die veelal een heel goede benadering is en waarvan we nu de afleiding zullen geven. We denken ons weer een diëlektricum tussen de platen van een vlakke condensator, waarin een homogeen veld heerst. Om het beschouwde molekuul denken we ons een bol geslagen, zo groot dat hij vele molekulen bevat. Als de straal zo groot is, kunnen we de invloed van het diëlektricum op het molekuul berekenen, alsof het diëlektricum buiten de bol een continuum was.



We splitsen nu $\vec{F}$ in 3 stukken:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$

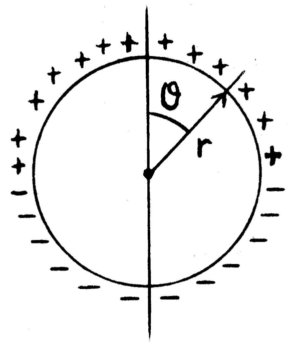
$\vec{F}_1$ is het veld in P veroorzaakt door de vrije ladingen op de condensatorplaten, (de oppervlakteladingsdichtheid op de platen is ω) + het veld veroorzaakt door de polarisatielading (oppervlaktedichtheid ω') op de vlakke begrenzingen van het diëlektricum. Derhalve is $\vec{F}_1 = \vec{D} - 4\pi\vec{P} = \vec{E}$.
(In grootte is $F_1 = 4\pi\omega + 4\pi\omega' = D - 4\pi P = E$.)

Opgave: Laat eens zien dat het veld veroorzaakt in een willekeurig punt op afstand a van een homogeen geladen vlak met oppervlakteladingsdichtheid ω gelijk is aan $2\pi\omega$ en loodrecht op het vlak gericht.

$\vec{F}_2$ is de bijdrage van de oppervlaktepolarisatielading op de begrenzing van de bol.

Die oppervlakteladingsdichtheid (vgl. V(1)) is gelijk aan de normaalcomponent van $\vec{P}$, dus $P \cos \theta$. De vertikale component van de veldsterkte in het middelpunt van de bol met straal r is

$$F_2 = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{P \cos^2\theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} P .$$



$\vec{F}_3$ tenslotte is de bijdrage tot het veld in P van de andere molekulen binnen de bol. Als men deze molekulen in een kubisch rooster plaatst (met P in één der roosterpunten), en als de dipoolmomenten van al deze molekulen gelijk en evenwijdig zijn, volgt gemakkelijk dat $\vec{F}_3 = 0$ (ga dit na aan de hand van de uitdrukking voor het veld afkomstig van een dipool). Dit geldt eveneens als alle molekulen hetzelfde (en gelijkgericht) dipoolmoment hebben en volkomen willekeurig over het volume van de bol (buiten het uitgekozen molekuul in het middelpunt) verdeeld zijn. Lorentz neemt nu aan dat algemeen $\vec{F}_3 = 0$.

We vinden dan:

(8) $\vec{F} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3}\vec{P} = \frac{\epsilon+2}{3}\vec{E}$ (Lokaal veld van Lorentz).

Daarmee wordt:

$$\vec{P} = N\alpha\vec{F} = N\alpha\frac{\epsilon+2}{3}\vec{E} \quad \text{en ook} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\vec{E}.$$

Dus:

(9) $\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4\pi}{3}N\alpha$. Dit is de zg. formule van Clausius-Mossotti.

Als ϵ dichtbij 1 ligt, gaat deze formule over in die voor verdunde gassen. De formule van Clausius-Mossotti is goed bruikbaar, wordt veel toegepast, maar is niet exact (behalve voor een kubisch ideaal kristal). In werkelijkheid zullen de dipolen niet alle gelijk zijn, noch onderling gelijkgericht staan. Er zijn fluktuaties die aanleiding geven tot correcties. In minder symmetrische kristallen kunnen zelfs grote afwijkingen voorkomen. Voor gecomprimeerde gassen en vloeistoffen zijn nauwkeuriger, maar uiteraard ingewikkelder theorieën ontwikkeld (Kirkwood, Onsager, de Boer, c.s., Mazur c.s.).

3. De brekingsindex.

Tot dusver hebben we in dit hoofdstuk slechts gekeken naar het elektrostatisch veld in een medium. We zullen nu eens kijken naar elektromagnetische golven in een homogeen, isotroop, ongeladen diëlektricum, dwz. we nemen ϵ en μ onafhankelijk van de plaats, $\rho_w = \vec{J}_w = 0$.

In dit geval luiden de Maxwell-vergelijkingen in een medium (vgl. (4) p.52): We moeten hierbij bedenken dat ϵ en μ afhankelijk zijn van de frequentie van de velden. Feitelijk hebben daarom deze vergelijkingen (waarin we $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ en $\vec{B} = \mu\vec{H}$ gesteld hebben) slechts zin voor velden die zuiver monochromatisch van t afhangen. Anders moet men de algemenere vergelijkingen (4) van p.58 gebruiken.

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{\epsilon\mu}{c}\dot{\vec{E}}$$

We kunnen nu weer net zo te werk gaan als in Hfdst. II, §4. De vergelijkingen hebben weer monochromatische vlakke golven tot oplossing, die transversaal zijn. De uitdrukking voor een lineair gepolariseerde vlakke monochromatische golf, die aan de vergelijkingen voldoet luidt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \text{Re } \vec{A}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \text{Re } -\sqrt{\epsilon\mu}\left(\vec{A} \wedge \frac{\vec{k}}{k}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

waarbij de golfvektor $\vec{k}$ nog willekeurig is. De amplitudevektor $\vec{A}$ staat loodrecht op $\vec{k}$ (want div $\vec{E} = 0$). Bij iedere $\vec{k}$ kunnen we nog 2 onafhankelijke onderling loodrechte polarisatierichtingen kiezen. Verder moet, zoals bij invullen in de Maxwell-vergelijkingen blijkt, $\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} k$. De voortplantingssnelheid van deze golven is nu dus $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ en zal in het algemeen nog van de frequentie afhangen. De betrekking tussen ω en $\vec{k}$ heet de dispersiewet.

Anderzijds weten we dat de voortplantingssnelheid van een elektromagnetische golf in een medium gelijk is aan $\frac{c}{n}$, waarin n de brekingsindex. Dit is eigenlijk juist de definitie van de brekingsindex.

We komen zo tot de conclusie dat de brekingsindex $n = \sqrt{\epsilon\mu}$. Dit is de beroemde relatie van Maxwell, die daar μ veelal weinig van 1 afwijkt voor doorzichtige media vaak vereenvoudigd wordt tot $n = \sqrt{\epsilon}$. Merk nog op dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ beide voldoen aan de golfvergelijking:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{E}} = 0 \quad \text{en} \quad \Delta\vec{B} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{B}} = 0.$$

Hoe hangen ϵ en n van de frequentie af? Daartoe moeten we weer ingaan op de atomistische theorie van de diëlektrische constante. Dit wordt uitvoerig behandeld in het diktaat Elektromagnetische eigenschappen der materie (dit geldt overigens voor veel van de in dit hoofdstuk besproken stof). Hier gaan we er maar heel kort op in.

Lorentz nam als model voor een atoom een gedempte harmonische oscillator (Lorentz-elektron, vgl. ook Hfdst.III). Als het elektrische veld ter plaatse van het atoom gegeven wordt door $\vec{F}_o e^{-i\omega t}$, luidt de bewegingsvergelijking:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_o^2\vec{r} = e\vec{F}_o e^{-i\omega t},$$

waarvan de oplossing (afgezien van een uitdempende vrije trilling) luidt:

$$\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{F}_o \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

(Men kan natuurlijk ook met reële grootheden werken: Als $\vec{F} = \vec{F}_o \cos \omega t$, wordt $\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{F}_o \frac{\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$ met $\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_o^2-\omega^2}$).

We krijgen dus een geïnduceerde dipool

$$\vec{\mu} = \frac{e^2}{m}\vec{F}_o \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

(10) zodat de polariseerbaarheid wordt $\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m(\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$.

Dat we hier een complexe waarde vinden (gevolg van de demping) betekent, zoals uit bovenstaande reële oplossing duidelijk zal zijn, dat $\vec{\mu}$ strikt genomen niet evenredig is met $\vec{F}$, maar dat geïnduceerde dipool en veld een fase-verschil met elkaar hebben.

Voor de diëlektrische constante en de brekingsindex vinden we nu:

verdund gas:

(11) $$n^2(\omega) - 1 = \epsilon(\omega) - 1 = 4\pi N\alpha(\omega) = 4\pi Ne^2 \frac{1}{m(\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} .$$

Voor een dicht medium als we weer de uitdrukking van Lorentz voor het lokale veld nemen:

(12) $$\frac{n^2(\omega)-1}{n^2(\omega)+2} = \frac{\epsilon(\omega)-1}{\epsilon(\omega)+2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha(\omega) = \frac{4\pi}{3} N \sum_k \frac{f_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega)} .$$

In de laatste uitdrukking hebben we tevens de generalisatie gemaakt dat er in elk atoom (N per cm^3) f_k oscillatoren met eigenfrequentie ω_k en dempingsconstante γ_k aanwezig zijn. De relatie

$$\frac{n^2(\omega)-1}{n^2(\omega)+2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha(\omega)$$

heet wel de formule van Lorentz-Lorenz.

De met het oscillatormodel gevonden uitdrukking voor $\alpha(\omega)$ (vgl. formule (12)) blijkt ook in de quantummechanica dezelfde gedaante te behouden. Dan echter stellen ω_k de absorptiefrequenties van het atoom voor en de grootheden f_k (die dan niet geheel hoeven te zijn), de zg. oscillatorsterkten, zijn evenredig met de overeenkomstige overgangswaarschijnlijkheden. Om de formule quantummechanisch af te leiden moet men zg. tijdafhankelijke storingsrekening toepassen: het atoom wordt nl. gestoord door een elektromagnetische golf. Een dergelijke dispersieformule is het eerst afgeleid door Kramers en Heisenberg.

In het doorzichtige gebied (als we niet met ω vlakbij een absorptiefrequentie zitten) kunnen we de demping γ verwaarlozen. We krijgen dan een reële brekingsindex. Als ω in de buurt van ω_k komt, worden ϵ en n echter complex. Hoe moeten we dat interpreteren? Stel de complexe brekings-

index is $\tilde{n} = n + i\varkappa$ (gesplitst in reëel en imaginair deel). Bedenk nu dat voor een vlakke golfoplossing:

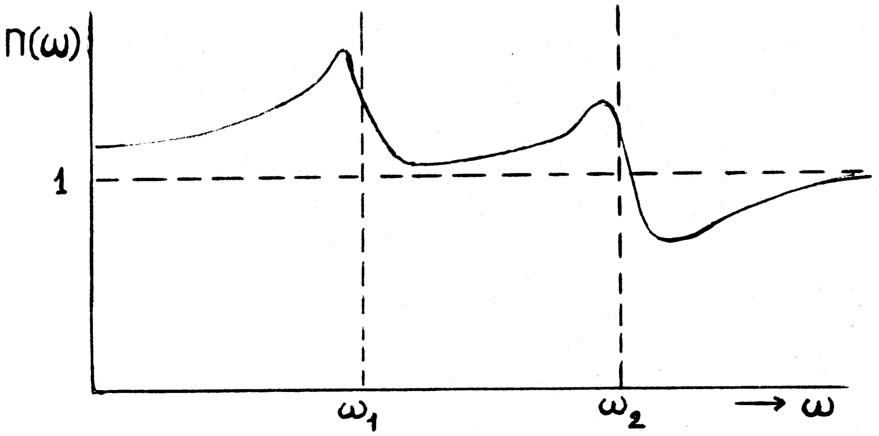
$$k = \frac{\tilde{n}\omega}{c}.$$

Daarmee wordt:

$$e^{ikx-i\omega t} = e^{-i\omega(t - \frac{\tilde{n}x}{c})} = e^{-i\omega(t - \frac{nx}{c})}\, e^{-\frac{\omega\varkappa}{c}x}.$$

Hieruit zien we dat Re $\tilde{n} = n$ de echte brekingsindex voorstelt, die de voortplantingssnelheid bepaalt en Im $\tilde{n} = \varkappa$ bepaalt de extinctie, de verzwakking van de golf als die door het medium loopt.

Het verloop van n ziet er schetsmatig uit als volgt:



Voor een verdund gas van harmonische oscillatoren hadden we de formule (10) voor de polariseerbaarheid $\alpha(\omega)$. Voor de complexe brekingsindex hebben we dan (vgl. (11) en bedenk dat $\tilde{n} \sim 1$)

$$\tilde{n}(\omega) - 1 = \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = n(\omega) - 1 + i\varkappa(\omega).$$

Hieruit volgt:

$$n(\omega) - 1 = \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}, \quad \varkappa(\omega) = \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}.$$

Tussen het reëele en imaginaire deel van de brekingsindex bestaan nu de volgende relaties:

$$(13) \qquad n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \kappa(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad \text{en} \quad \kappa(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{n(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

waarin P de hoofdwaarde van de integraal betekent (dwz. dat men het intervalletje $\omega - \epsilon$ tot $\omega + \epsilon$ rondom het singuliere punt ω uitsluit en na integratie $\lim_{\epsilon \to 0}$ neemt).Uit deze zg. Kramers-Kronig relaties volgt dat als we hetzij n, hetzij κ voor alle frequenties kennen, daardoor de andere grootheid volledig bepaald is.

Voor onze bovenstaande uitdrukkingen voor $n(\omega)$ en $\kappa(\omega)$ kan men de geldigheid van (13) door expliciete berekening verifiëren. Het belangrijke punt is nu dat men de K.K.-relaties kan bewijzen onafhankelijk van een speciaal atoommodel of een speciale formule voor $\tilde{n}(\omega)$. Het zijn relaties, die moeten gelden voor iedere correcte uitdrukking voor de complexe brekingsindex. Ook gelden ze niet alleen voor brekingsindex en extinctiecoëfficiënt, maar voor allerlei zg. responsiefunkties, zoals de diëlektrische constante, de magnetische susceptibiliteit, bij elektrische netwerken, in de verstrooiingstheorie, etc. Ze kunnen worden afgeleid uit een zg. causaliteitsvoorwaarde, die in het door ons besproken geval zou luiden: Bekijk een plak diëlectricum ter dikte d, waarop we van de ene kant een (elektromagnetisch) lichtsignaal laten vallen. Vóórdat het signaal aan de andere kant te voorschijn komt moet er minstens een tijd $\frac{d}{c}$ verlopen zijn nadat het signaal aan de ene kant het medium heeft bereikt. Ruw gezegd: "Het gevolg kan niet eerder komen dan de oorzaak". We moeten hier met deze aanduidingen volstaan.

4. Magnetisme. Ook kunnen we nauwelijks ingaan op de atomistische theorie van het magnetisme.

Als we in een beperkt gebiedje van de ruimte een aantal bewegende ladingen hebben, dan kan men uitgaande van de formule van Biot en Savart (Hfdst. II) aantonen, dat in eerste benadering het magnetisch

veld op grote afstand hetzelfde is als dat van een magnetisch dipoolmoment in het centrum van de ladingsverdeling ter grootte van:

$$\vec{\mu}_{magn} = \frac{1}{2c} \sum_i e_i \, (\vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i) ,$$

waarin $\vec{r}_i$ de plaatsvektor van de lading e_i t.o.v. het centrum voorstelt.

Als de bewegende ladingen allemaal elektronen zijn (als we bv. naar het veld van een atoom kijken), wordt

$$\vec{\mu}_{magn} = \frac{e}{2mc} \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \frac{e}{2mc} \vec{L} ,$$

waarin $\vec{p}_i$ de impuls is van het i-de elektron en $\vec{L}$ het totale baanimpulsmoment voorstelt. Quantummechanisch kunnen we spreken van de verwachtingswaarde van het magnetisch dipoolmoment in een bepaalde stationaire toestand van het atoom of molecuul met eigenfunktie φ:

$$\langle \vec{\mu}_{magn} \rangle = \frac{e}{2mc} \langle \varphi | \vec{L} + 2\vec{S} | \varphi \rangle .$$

Ook de totale elektronenspin $\vec{S}$ geeft een (dubbele) bijdrage.
Voor de meeste atomen en molekulen is bovenstaande uitdrukking nul in de grondtoestand. Ze hebben geen permanent magnetisch dipoolmoment. Deze stoffen zijn diamagnetisch. Door een uitwendig magnetisch veld aan te leggen wordt nl. de grondtoestand een beetje gestoord, waardoor er een klein magnetisch moment geïnduceerd wordt dat tegengesteld gericht is aan het veld.

De magnetische polarisatie (dipoolmoment per cm^3) is

$$\vec{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \vec{H} = \chi_m \vec{H} .$$

χ_m heet de magnetische susceptibiliteit, μ de permeabiliteit.
Dit diamagnetisme treedt altijd op: hier is $\chi_m < 0$ en dus $\mu < 1$.
In stoffen waar de atomen of molekulen wel een magnetisch momnent μ_m in de grondtoestand hebben, wordt de diamagnetische bijdrage geheel overschaduwd door de bijdrage van de oriëntatie van deze permanente dipolen in een uitwendig veld. Dit zijn paramagnetische stoffen.

Voorbeelden: ionen van overgangsmetalen en zeldzame aarden, enkele gassen als O_2, NO. Nu is de susceptibiliteit afhankelijk van de temperatuur en binnen zekere grenzen geldt hier de klassieke wet van Curie:

$$\chi_m = \frac{N\mu_m^2}{3kT},$$

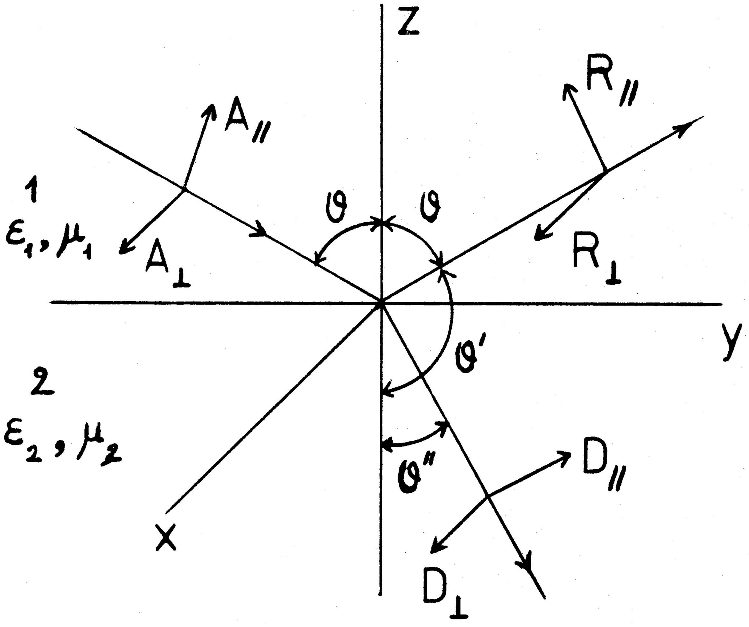
die Langevin het eerst (1905) heeft afgeleid. (Vgl. §2b van dit Hfdst.)

Dan hebben we nog ferromagnetische stoffen, bv. ijzer en nikkel. Deze kunnen ook zonder uitwendig veld al een spontane magnetisatie hebben. De atomen hebben hier ook een permanent magnetisch moment en er bestaat een zodanig sterke (niet magnetische, maar quantummechanische) wisselwerking tussen de atomen dat hun magnetische momenten bij voorkeur parallel gaan staan (of anti-parallel bij zg. antiferromagnetische stoffen). Deze spontane polarisatie treedt alleen op beneden een zekere temperatuur, de Curie-temperatuur. Boven die temperatuur gedragen ferromagnetische stoffen zich paramagnetisch. U weet ook dat bij deze stoffen $\vec{B}$ en $\vec{H}$ niet meer evenredig zijn, men kan ook zeggen dat μ (of χ) nog van de veldsterkte afhangt.

5. Breking en reflectie van een lichtgolf.

Fresnel had in 1826 reeds met behulp van zijn elastische golftheorie formules afgeleid voor de relatieve sterkte van breking en terugkaatsing van een lichtgolf aan een plat grensvlak tussen twee diëlektrische media. Hiervoor moesten allerlei gekunstelde aannamen gemaakt worden. Met behulp van de elektromagnetische lichttheorie gaat de afleiding van de formules van Fresnel geheel straightforward; hij is het eerst gegeven door Lorentz.

We beschouwen twee media 1 en 2 (bv. lucht en glas). Laat nu uit medium 1 een lineair gepolariseerde monochromatische vlakke golf op het scheidingsvlak vallen. De normaal op dat scheidingsvlak kiezen we als z-as en we nemen de x-as loodrecht op het invalsvlak (vlak door normaal en golfvektor $\vec{k}_1$).



Ontbind het elektrische veld in een component in het invalsvlak en één loodrecht daarop. Bedenk dat $\vec{E}$, $\vec{B}$ en de golfvektor $\vec{k}_1$ een rechts stelsel vormen. We kunnen de invallende vlakke golf dan als volgt schrijven (vgl. §3 van dit Hfdst.).

$$E_x^i = A_\perp \, e^{ik_1(y \sin\theta - z\cos\theta) - i\omega t}$$

$$E_y^i = A_{//} \cos\theta \, e^{ik_1(y \sin\theta - z\cos\theta) - i\omega t}$$

$$E_z^i = A_{//} \sin\theta \, e^{\overline{\qquad\qquad}} \qquad \text{Hierin is } k_1 = \frac{n_1\omega}{c} = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}\,\frac{\omega}{c}.$$

$$B_x^i = A_{//} \sqrt{\epsilon_1\mu_1} \, e^{\overline{\qquad\qquad}}$$

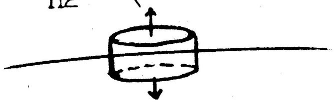
$$B_y^i = - A_\perp \sqrt{\epsilon_1\mu_1} \cos\theta \, e^{\overline{\qquad\qquad}}$$

$$B_z^i = - A_\perp \sqrt{\epsilon_1\mu_1} \sin\theta \, e^{\overline{\qquad\qquad}} \quad .$$

De invallende golf zal in het 2^e medium als een gebroken golf doorgaan, maar bovendien wordt een gedeelte van de invallende golf teruggekaatst. Het blijkt nl. dat men zonder gereflecteerde golf niet aan de grensvoorwaarden kan voldoen.

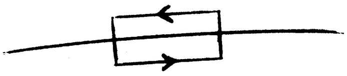
Die grensvoorwaarden luiden: $\vec{E}_{tg}$ en $\vec{H}_{tg}$ continu en $\vec{D}_n$ en $\vec{B}_n$ continu. In het eerste hoofdstuk hebben we immers al gezien dat uit

div $\vec{D} = 0$ volgt $D_{n1} = D_{n2}$. (Bekijk maar een plat'doosje aan het grensvlak



)

Uit rot $\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$ volgt als we een rechthoekig integratie wegje aan weerszijden van het grensvlak bekijken en bedenken dat $\dot{\vec{B}}$ overal en altijd eindig is $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ en dus $E_{tg1} = E_{tg2}$.



Verder merken we op dat als aan het eerste stel grensvoorwaarden voldaan is (tangentiële componenten van $\vec{E}$ en $\vec{H}$ continu), automatisch aan het 2^e stel voldaan is (normale componenten van $\vec{D}$ en $\vec{B}$ continu). Immers is voor 2 evenwijdige gesloten krommen aan weerszijden van het grensvlak $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ gelijk, omdat E_{tg} continu is. Daaruit volgt dat $\int \dot{\vec{B}}\cdot d\vec{o}$ aan weerskanten gelijk is, dus is $\dot{B}_n$ continu en daarmee ook B_n continu, omdat $\vec{B}_n$ een periodieke funktie in de tijd is zonder constant stuk. We kunnen ons dus beperken tot de continuïteit van de tangentiële componenten van $\vec{E}$ en $\vec{H}$.

Hieruit volgt nu dat de exponenten van de e-macht voor $z = 0$ in de gebroken en teruggekaatste golf even groot moeten zijn als in de invallende golf voor alle x, y en t.

Daar x niet voorkomt (bij de invallende golf) volgt hieruit in de eerste plaats dat de voortplantingsrichting van gebroken en teruggekaatste golven in het invalsvlak moeten liggen. De exponenten van deze golven luiden:

gereflecteerde golf: $ik_1(y \sin\theta' - z\cos\theta') - i\omega t$

gebroken golf : $ik_2(y \sin\theta'' - z\cos\theta'') - i\omega t$.

Voor $z = 0$ moet dit voor alle y en t gelijk zijn aan $ik_1 y \sin\theta - i\omega t$. Dan moet $\sin\theta' = \sin\theta$ en daar voor een gereflecteerde golf $\theta' \geq \frac{\pi}{2}$ moet $\theta' = \pi - \theta$. Dit betekent: hoek van inval = hoek van terugkaatsing.

Verder moet: $\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1\mu_1}{\epsilon_2\mu_2}}$. Dit is de brekingswet van Snellius.

We kunnen nu de veldgrootheden in gereflecteerde en gebroken golf als volgt schrijven: ($\theta' = \pi - \theta$):

$$E_x^r = R_\perp\, e^{ik_1(y\sin\theta + z\cos\theta) - i\omega t} \qquad E_x^d = D_\perp\, e^{ik_2(y\sin\theta'' - z\cos\theta'') - i\omega t}$$

$$E_y^r = -R_{/\!/}\cos\theta\, e^{\overline{}} \qquad E_y^d = D_{/\!/}\cos\theta''\, e^{\overline{}}$$

$$E_z^r = R_{/\!/}\sin\theta\, e^{\overline{}} \qquad E_z^d = D_{/\!/}\sin\theta''\, e^{\overline{}}$$

$$B_x^r = R_{/\!/}\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\, e^{\overline{}} \qquad B_x^d = D_{/\!/}\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\, e^{\overline{}}$$

$$B_y^r = R_\perp\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\cos\theta\, e^{\overline{}} \qquad B_y^d = -D_\perp\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\cos\theta''\, e^{\overline{}}$$

$$B_z^r = -R_\perp\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\sin\theta\, e^{\overline{}} \qquad B_z^d = -D_\perp\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\sin\theta''\, e^{\overline{}}$$

Voor $z = 0$ moeten nu de tangentiële componenten van $\vec{E}$ en $\vec{H}$ continu zijn. Dit betekent:

$$E_x^i + E_x^r = E_x^d \qquad H_x^i + H_x^r = H_x^d$$

$$E_y^i + E_y^r = E_y^d \qquad H_y^i + H_y^r = H_y^d.$$

Dit levert de volgende relaties:

$$A_\perp + R_\perp = D_\perp$$

$$A_{/\!/}\cos\theta - R_{/\!/}\cos\theta = D_{/\!/}\cos\theta''$$

$$A_{/\!/}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + R_{/\!/}\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} = D_{/\!/}\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}$$

$$-A_\perp\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta + R_\perp\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\theta = -D_\perp\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}\cos\theta''.$$

Als we R en D hieruit oplossen vinden we:

$$D_\perp = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + m\cos\theta''}A_\perp \qquad R_\perp = \frac{\cos\theta - m\cos\theta''}{\cos\theta + m\cos\theta''}A_\perp$$

$$D_{/\!/} = \frac{2\cos\theta}{m\cos\theta + \cos\theta''}A_{/\!/} \qquad R_{/\!/} = \frac{m\cos\theta - \cos\theta''}{m\cos\theta + \cos\theta''}A_{/\!/},$$

waarin $m = \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_1}{\epsilon_1\mu_2}}$.

Nemen we $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (praktisch belangrijk), dan wordt

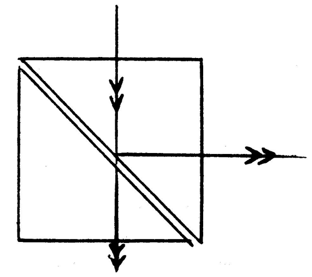
$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n \left(= \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \right)$ en we krijgen de formules van <u>Fresnel</u>:

$$D_\perp = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin (\theta + \theta'')} A_\perp \qquad R_\perp = - \frac{\sin (\theta - \theta'')}{\sin (\theta + \theta'')} A_\perp$$

$$D_{/\!/} = \frac{2 \sin \theta'' \cos \theta}{\sin (\theta + \theta'') \cos (\theta - \theta'')} A_{/\!/} \qquad R_{/\!/} = \frac{\text{tg} (\theta - \theta'')}{\text{tg} (\theta + \theta'')} A_{/\!/} \ .$$

Een uitvoerige discussie van deze resultaten vindt u in Born, Optik, §10 en §11. Hier een paar opmerkingen:

Als $n_2 > n_1$ hoort bij iedere hoek θ een reële hoek θ'' $\left(\sin \theta'' = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \right)$. Als echter $n_2 < n_1$ krijgen we slechts een reële θ'' als $\sin \theta \leq \frac{n_2}{n_1}$. Als $\sin \theta > \frac{n_2}{n_1}$ krijgen we <u>totale reflectie</u>. De <u>grenshoek</u> θ_o wordt gegeven door $\sin \theta_o = \frac{n_2}{n_1} = n$. Er is dan nog wel een veld in het 2^e medium, maar het neemt exponentieel met de diepte af (k_2 heeft een zuiver imaginaire component in de z-richting). Er stroomt geen energie in het 2^e medium over. Er ontstaat een golf die zich in de positieve y richting voortplant. De indringdiepte is van de orde $\frac{\lambda}{2\pi}$. Het is dus een inhomogene golf. Men kan de aanwezigheid van deze golf ook experimenteel aantonen, bv. met de volgende opstelling:



2 prisma's met zeer dun laagje lucht er tussen. Er komt toch nog een golf door het 2^e prisma.

We sluiten nu verder totale reflectie uit. Uit de formules van Fresnel volgt dan dat de gebroken golf zonder fasesprong doorgaat. Als $n_2 > n_1$, dus $\theta'' < \theta$ hebben $R_\perp$ en $A_\perp$ tegengesteld teken; dit betekent een fasesprong van 180°. Als $\theta + \theta'' < \frac{\pi}{2}$ hebben $R_{/\!/}$ en $A_{/\!/}$ hetzelfde teken, dwz. ook de $/\!/$-component heeft een fasesprong van 180° (zie figuur). Bij grotere invalshoeken zijn ze daarentegen in fase. Als $n_2 < n_1$ dan is dit alles net omgekeerd.

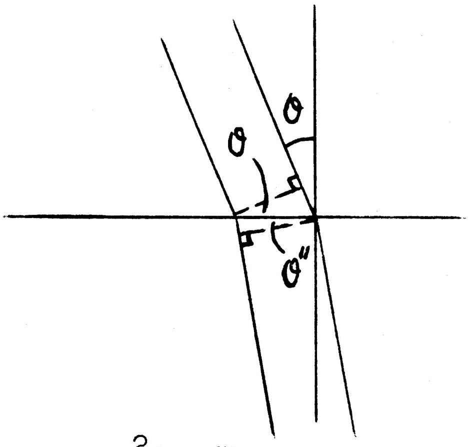
Nemen we speciaal het geval van loodrechte inval: $\theta = \theta'' = 0$.
Dan is er geen verschil tussen evenwijdige en loodrechte componenten.
Uit de formules volgt dan:

$$D_\perp = \frac{2}{m+1} A_\perp$$

$$R_\perp = -\frac{m-1}{m+1} A_\perp .$$

Als $\mu_1 = \mu_2$ is $m = n$. Voor de evenwijdige componenten dezelfde formules (afgezien van teken voor $R_{/\!/}$).

We kunnen nu ook de reflectiecoëfficiënt en het doorlatingsvermogen (transmissiecoëfficiënt) berekenen. Dit doen we met behulp van de vektor van Poynting, die de energiestroomdichtheid levert $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \wedge \vec{H}$. Voor $1\ cm^2$ grensvlak moeten we voor de invallende en de gereflecteerde bundel deze met $\cos\theta$ en voor de gebroken bundel met $\cos\theta''$ vermenigvuldigen om de doorsnede van de bundels te krijgen. Zie figuur.



Stellen we $\mu_1 = \mu_2 = 1$ dan vinden we op deze manier voor de reflectiecoëfficiënten en de doorlatingsvermogens (men controlere dit):

$$r_\perp = \frac{\sin^2(\theta-\theta'')}{\sin^2(\theta+\theta'')} \qquad d_\perp = \frac{\sin 2\theta \sin 2\theta''}{\sin^2(\theta+\theta'')}$$

$$r_{/\!/} = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta-\theta'')}{\mathrm{tg}^2(\theta+\theta'')} \qquad d_{/\!/} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\theta''}{\sin^2(\theta+\theta'')\cos^2(\theta-\theta'')} .$$

Men verifieert dat $r_\perp + d_\perp = 1$ en $r_{/\!/} + d_{/\!/} = 1$.
Uit deze formules volgt dat $r_{/\!/} = 0$ als $\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}$. Dit zal het geval zijn als $\sin\theta''(= \frac{1}{n}\sin\theta) = \cos\theta$, dus als $\mathrm{tg}\,\theta = n$. Deze hoek heet de polarisatiehoek of hoek van Brewster. Door reflectie onder de polarisatiehoek kan men derhalve uit natuurlijk licht lineair gepolariseerd licht verkrijgen.

Bij een invalshoek gelijk aan de polarisatiehoek staan gereflecteerde en gebroken bundel loodrecht op elkaar.

In het speciale geval van een loodrecht invallende bundel worden de formules uiteraard bijzonder eenvoudig:

$$r = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 , \quad d = \frac{4n}{(n+1)^2} .$$

6. Golven in geleidende media.

Tenslotte zullen we nog in het kort de voortplanting van elektromagnetische golven in geleidende media beschouwen. We beperken ons tot een homogene, isotrope geleider, bv. een metaal. Hierin wordt energie gedissipeerd (Joule warmte), daarom zijn metalen voor licht praktisch ondoorzichtbaar.

Naast de Maxwell-vergelijkingen en de reeds besproken fenomenologische relaties $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ en $\vec{B} = \mu\vec{H}$ introduceren we hier een derde fenomenologische betrekking, nl. $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, waarin σ het geleidingsvermogen voorstelt. Dit is niets anders dan de bekende wet van Ohm. Als men $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ nl. toepast op een stroomdraad en achtereenvolgens over de doorsnede O en dan over de lengte ℓ integreert vindt men voor het potentiaalverschil $\varphi_1 - \varphi_2 = J.R$, waarin $J = \int \vec{j}\cdot d\vec{o}$ en de weerstand $R = \frac{\ell}{O\sigma}$.

De Maxwell-vergelijkingen luiden nu:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mu\vec{E} + \frac{\epsilon\mu}{c}\dot{\vec{E}} .$$

Nemen we van de laatste vgl. de divergentie:

$4\pi\sigma\,\text{div}\,\vec{E} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{E} = 0$ of $\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}\rho = 0$, waaruit volgt:

$\rho(t) = \rho(0)\,e^{-t/\tau}$ waarin $\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$ de relaxatietijd is. ρ neemt dus onafhankelijk van de aanwezigheid van golven exponentieel af. Is ρ eenmaal

0, dan blijft $\rho = 0$. We kijken nu verder naar de situatie waarbij ρ gelijk aan 0 (geworden) is. Dan wordt: div $\vec{E} = 0$, dit betekent dat we <u>transversale</u> golven krijgen, zoals we vroeger reeds meermalen gezien hebben.

Evenals vroeger (Hfdst.II) kunnen we $\vec{E}$ of $\vec{B}$ uit de Maxwell-vergelijkingen elimineren. Beide veldgrootheden blijken dan te voldoen aan:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\ddot{\vec{E}} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\dot{\vec{E}} = 0 .$$

De term met $\dot{\vec{E}}$ veroorzaakt een demping van de golven. Bovenstaande vgl. heet wel de <u>telegraafvergelijking</u>.

Daar ϵ, μ en σ strikt genomen nog van de frequentie ω afhangen, kijken we naar oplossingen die monochromatisch zijn, dwz. als $e^{-i\omega t}$ van de tijd afhangen.

Dus: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$, etc. Dan geldt:

$$\text{div}\, \vec{E}_\omega = 0$$

$$\text{rot}\, \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c}\vec{B}_\omega$$

$$\text{div}\, \vec{B}_\omega = 0$$

$$\text{rot}\, \vec{B}_\omega = -\frac{i\omega\mu}{c}\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\right)\vec{E}_\omega .$$

Dit zijn dezelfde vergelijkingen als in §3 van dit hoofdstuk als we daarin ϵ vervangen door $\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}$.

We krijgen nu dus een complexe brekingsindex $\tilde{n} = \left\{\left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\right)\mu\right\}^{\frac{1}{2}} \equiv n + i\kappa$.

Bekijken we voor het gemak een vlakke golf, die zich in de z-richting voortplant. Dan zijn alleen de x en y componenten van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ van nul verschillend en die hangen alleen van z af. Onze vgl. worden:

$$-\frac{\partial E_{\omega y}}{\partial z} = \frac{i\omega}{c}B_{\omega x} , \qquad \frac{\partial B_{\omega x}}{\partial z} = -\frac{i\omega}{c}\tilde{n}^2 E_{\omega y} .$$

$E_{\omega y}$ en $B_{\omega x}$ zijn gekoppeld, evenzo $E_{\omega x}$ en $B_{\omega y}$.

Op die manier krijgen we 2 onderling loodrecht lineair gepolariseerde monochromatische golven. We krijgen een oplossing door te stellen:

$$E_{\omega y} = a\, e^{i \frac{\omega}{c} \tilde{n} z}$$

$$B_{\omega x} = b\, e^{i \frac{\omega}{c} \tilde{n} z}$$. Deze voldoen als $b = -a\tilde{n}$.

Er is dus een faseverschil tussen $\vec{E}$ en $\vec{B}$.

Nu was: $\tilde{n}^2 \equiv n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \left(\epsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\right)\mu$, dus $n^2 - \kappa^2 = \epsilon\mu$, $n\kappa = \frac{2\pi\sigma\mu}{\omega}$.

Hieruit volgt:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\mu \left(\sqrt{\epsilon^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} + \epsilon\right)$$

$$\kappa^2 = \tfrac{1}{2}\mu \left(\sqrt{\epsilon^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}} - \epsilon\right).$$

We kunnen ook schrijven: $\tilde{n} = \sqrt{n^2 + \kappa^2}\, e^{i\alpha}$ met $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa}{n}$.

De veldgrootheden worden daarmee:

$$E_y = \operatorname{Re}\, a\, e^{-\frac{\omega\kappa}{c} z}\, e^{i \frac{\omega n}{c} z - i\omega t}$$

$$B_x = \operatorname{Re}\, -a\sqrt{n^2 + \kappa^2}\, e^{-\frac{\omega\kappa}{c} z}\, e^{i \frac{\omega n}{c} z - i\omega t + i\alpha}$$

waarin we a willekeurig reëel kunnen nemen.

We krijgen zo een lineair gepolariseerde monochromatische transversale gedempte vlakke golf. κ heet de extinctiecoëfficiënt. De intensiteit van de golf neemt af als $e^{-\frac{2\omega\kappa}{c} z}$, dwz. $\frac{2\omega\kappa}{c}$ is de absorptiecoëfficiënt.

Als we voor σ nemen het statisch geleidingsvermogen is voor metalen veelal $\frac{\sigma}{\omega} \gg \epsilon$. Bv. voor koper en infrarode straling van 1 μ golflengte is $\frac{\sigma}{\omega} \sim 270$. ϵ is van normale grootteorde. In deze benadering (die neerkomt op het verwaarlozen van de verplaatsingsstroom $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, of ook van de term met $\ddot{\vec{E}}$ in de golfvergelijking) hebben we:

$$n \sim \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

De **indringdiepte** (de afstand waarop de amplitude met een faktor $e^{-2\pi}$ is gereduceerd) wordt

$$\frac{2\pi c}{\omega\kappa} = c\sqrt{\frac{2\pi}{\mu\sigma\omega}}.$$

Voor koper en golflengten van respectievelijk 1 cm, 1 m en 100 m wordt dit $2,4.10^{-4}$ cm, 0,024 mm, 0,24 mm.

Merk op dat dit onmiddellijk samenhangt met het bekende Skin-effekt het verschijnsel dat een hoogfrequente wisselstroom alleen in een dun huidje aan het oppervlak van een geleider loopt.

In de vlakke golf is de verhouding van magnetische tot elektrische energie:

$$\frac{n^2 + \varkappa^2}{\epsilon\mu} \sim \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}.$$

Terwijl in een isolator deze energieën gelijk zijn, is in een metaal. de magnetische energie verreweg de grootste. Voor koper en een golflengte van 1μ is de elektrische energie slechts $\frac{1}{3}$‰ van de totale. Tenslotte kijken we nog even naar de reflectie van elektromagnetische straling door metaalspiegels. De formules van de voorgaande § blijven in het algemeen gelden als we n vervangen door $\tilde{n}$. Beperken we ons tot een loodrecht invallende bundel. Neem $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

De reflectiecoëfficiënt wordt:

$$r = \frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}+1} \cdot \frac{\tilde{n}^*-1}{\tilde{n}^*+1} = \frac{(n-1)^2 + \varkappa^2}{(n+1)^2 + \varkappa^2}.$$

Mogen we de benadering $n \sim \varkappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} \gg 1$ toepassen, dan wordt

$$r = \frac{\frac{4\pi\sigma}{\omega} - 2\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} + 1}{\frac{4\pi\sigma}{\omega} + 2\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} + 1} \sim 1 - 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}.$$

Voor $\sigma \to \infty$ (ideale geleider) wordt $r = 1$. Er wordt geen energie in het metaal gedissipeerd.

Bovenstaande formule is in bekende proeven van Hagen en Rubens (1903) in het langgolvige infrarood kwantitatief bevestigd.

Voor kortere golven blijft de hier besproken eenvoudige theorie niet meer gelden. We moeten σ als een van ω afhankelijke grootheid beschouwen. Voor grotere ω is het niet juist om het statisch geleidingsvermogen te nemen, de vrije elektronen in het metaal kunnen zo snelle trillingen niet zonder traagheid volgen.

INHOUD

pagina

Overzicht leerboeken 1

Hoofdstuk I Inleiding over vektorvelden

1. Vektoranalyse 2
2. Berekening van een vektorveld als de bronnen en wervels gegeven zijn 8
3. Algemene orthogonale coördinaten 11

Hoofdstuk II De Maxwell-vergelijkingen in vakuum

1. Algemeen 13
2. Elektrostatica 15
3. Stationaire stromen 22
4. Elektromagnetische golven in vakuum 26

Hoofdstuk III Algemene oplossing van de Maxwell-vergelijkingen voor tijdafhankelijke velden

1. Potentialen en ijkinvariantie 29
2. Oplossing van de vergelijkingen voor de potentialen in Lorentz-ijking. Geretardeerde potentialen 32
3. De behoudswetten van energie en impuls 34
4. Het elektromagnetisch veld van een willekeurig bewegende puntlading 37
5. Verstrooiing van elektromagnetische straling 43

Hoofdstuk IV Relativistisch covariante schrijfwijze der Maxwell-vergelijkingen 46

Hoofdstuk V Het elektromagnetisch veld in een medium

1. Het elektrostatisch veld in een diëlektrisch medium 54
2. De diëlektrische constante 58
3. De brekingsindex 63
4. Magnetisme 67
5. Breking en reflectie van een lichtgolf 69
6. Golven in geleidende media 75

Opgave 1

a Bewijs de volgende veel voorkomende identiteiten

$$\mathrm{div}\ \varphi\vec{v} = \varphi\ \mathrm{div}\ \vec{v} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\ \varphi$$

$$\mathrm{rot}\ \varphi\vec{v} = \mathrm{grad}\ \varphi \wedge \vec{v} + \varphi\ \mathrm{rot}\ \vec{v}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{v} - \vec{v}\cdot\mathrm{rot}\ \vec{w}$$

$$\mathrm{rot}\ (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v}\ \mathrm{div}\ \vec{w} - \vec{w}\ \mathrm{div}\ \vec{v} + (\vec{w}\cdot\mathrm{grad})\ \vec{v} - (\vec{v}\cdot\mathrm{grad})\ \vec{w}$$

$$\mathrm{rot}\ (\mathrm{rot}\ \vec{v}) \equiv \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\ \vec{v}) - \Delta\ \vec{v}$$

φ is een scalar; $\vec{v}$, $\vec{w}$ zijn vectoren.

b Bereken ($\vec{r}$ is de radius-vector):

div $\vec{r}$, rot $\vec{r}$; grad $f(r)$, waarin $f(r)$ een willekeurige (differentieerbare) functie van $r \equiv |\vec{r}|$ is.

c Laat zien dat een centraal krachtveld ($f(r)\hat{r}$) een potentiaal heeft, omdat rot $f(r)\hat{r} = 0$ (nagaan!)

$$\left(\hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}\right).$$

d Schrijf de Laplace-operator in bolcoördinaten (vgl. §I.3 van het college-diktaat).

Opgave 2

a Een (punt)lading $+q$ bevindt zich op afstand d van een oneindige metalen geaarde plaat. Wat is het elektrisch veld in de half-ruimte van de puntlading?

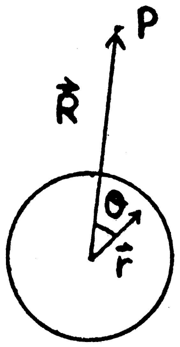
b Wat is het elektrisch veld aan weerszijde van een oneindige plaat met uniforme ladingsdichtheid σ ?

Opgave 3

Gegeven een homogeen geladen bol (ladingsdichtheid ρ). We berekenen op verschillende manieren de potentiaal φ in een willekeurig punt:

Opgave 3 (vervolg)

I Buiten de bol (zie figuur)



a Schrijf de algemene oplossing van de vgl. van Laplace $\Delta\varphi = 0$ in termen van Legendre-polynomen op. [Denk aan het gedrag van φ als $R \to \infty$]. Maak gebruik van de symmetrie van de ladingsverdeling om $\varphi(P)$ hieruit te vinden.

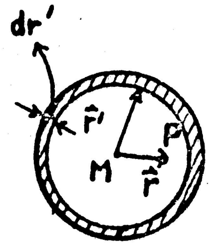
b Bepaal φ in P ook door rechtstreekse integratie van:

$$\varphi(\vec{R}) = \int_{\text{Bol}} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}\, d\vec{r}$$

(zie diktaat vgl. II.7).

c Bereken de potentiaal ook door eerst de elektrische veldsterkte in P te bepalen en daaruit de potentiaal af te leiden.

II Binnen de bol (zie figuur)



a We bekijken eerst de potentiaal φ_S in P veroorzaakt door een homogeen geladen bolschil (dichtheid ρ) met straal r' en dikte dr'. Schrijf de algemene uitdrukking voor φ_S in termen van Legendre-polynomen op (φ_S mag in M niet divergeren!), en gebruik de symmetrie van de ladingsverdeling om hieruit $\varphi_S(P)$ te vinden. (Leid dit resultaat ook af door naar de veldsterkte in P te kijken). Bereken nu de potentiaal in een punt P binnen een homogeen geladen bol.

Werkcollege Maxwell-theorie 1975

Opgave 3 (vervolg)

b We kunnen ook de vergelijking van Poisson oplossen:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \ .$$

Vind een eenvoudige functie $f(r)$ zó dat:

$$\varphi(r) = C + k\, f(r) \ .$$

C en k zijn constanten. Waardoor worden zij vastgelegd?

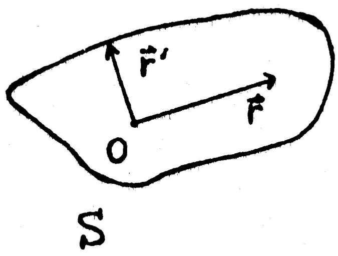
Waarom kiezen we bij voorbaat $f(r)$ en niet $f(\vec{r})$?

c Bereken ook weer de potentiaal uit het elektrische veld.

Opgave 4

Gegeven een willekeurig gesloten oppervlak S waarbinnen zich geen ladingen bevinden (welke vgl. geldt dus voor de potentiaal?)

Op S is de potentiaal een voorgeschreven functie $\varphi_o(\vec{r}\,')$ (een punt op S accentueren we). Zoals bekend, vinden we de potentiaal binnen S door de vgl. van Laplace met bijbehorende randvoorwaarde op te lossen:



$$\Delta\varphi(\vec{r}) = 0; \qquad \varphi(\vec{r}\,') = \varphi_o(\vec{r}\,') \tag{1}$$

Bewijs nu dat (1) equivalent is met het vinden van die functie $\varphi(\vec{r})$ die

$$\left.\begin{array}{l} \text{de uitdrukking} \\ \int (\text{grad}\ \varphi)^2\, d\tau \\ \text{minimaal maakt, en gelijk aan } \varphi_o \text{ is op S.} \end{array}\right\} \tag{2}$$

(de integraal loopt over het door S omsloten volume).

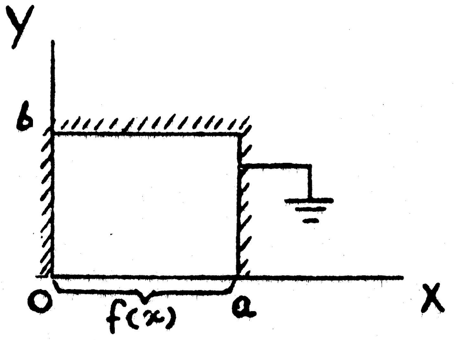
(Aanwijzing: laat φ de functie zijn die $\int (\text{grad}\ \varphi)^2\, d\tau$ minimaal maakt en φ_o is op S; bekijk nu $\varphi' = \varphi + \epsilon\psi$, waarbij ϵ zeer klein is en $\psi(\vec{r}\,') = 0$ voor alle punten op S. φ' is dus een naburige functie van φ).

Wat is de fysische betekenis van $\int (\text{grad}\ \varphi)^2\, d\tau$, en derhalve van het minimaliserings-principe (2)?

Werkcollege Maxwell-theorie 1975

Opgave 5

We bekijken een rechthoek; binnen de omtrek bevinden zich geen ladingen, op de zijden is de potentiaal nul behalve op het segment [0,a] langs de x-as, waar de potentiaal een voorgeschreven functie f(x) is (f(0) = f(a) = 0!) (zie figuur).



Gevraagd: de potentiaal $\varphi(x,y)$ binnen de rechthoek.

a Welke vgl. moet worden opgelost om $\varphi(x,y)$ te vinden?

b De geometrie suggereert, dat we de Laplace-operator in cartesische coördinaten moeten uitschrijven. Vind nu een oplossing $\varphi(x,y)$ door separatie (dat wil zeggen: zoek een oplossing van het type $\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y)$, waarbij X en Y moeten worden gevonden). Houd nog geen rekening met de randvoorwaarde op de x-as.

c Wat is nu de meest algemene oplossing $\varphi(x,y)$ voor de potentiaal? Hierin komt een serie (nog) onbekende constanten voor. Waardoor zullen deze constanten worden vastgelegd?

d Hoe zou u nu de randvoorwaarde $\varphi(x,0) = f(x)$ voor $x \in [0,a]$ in rekening kunnen brengen, en zo de oplossing $\varphi(x,y)$ voor de potentiaal binnen de rechthoek met gegeven randvoorwaarden kunnen vinden (zie toelichting)?

e Nu kunt u ook gemakkelijk $\varphi(x,y)$ vinden als de potentiaal op elk van de zijden een gegeven functie is (maar nul op de hoekpunten). Hoe?

Kunt u het probleem ook nog oplossen als de potentiaal op alle zijden een gegeven functie is, niet noodzakelijk nul op de hoekpunten maar natuurlijk wel continu aansluitend?

Opgave 6

Een bol heeft een oppervlakteladingsdichtheid

$\sigma = \sigma_o \cos \Theta$ (σ_o constante).

a Bepaal de potentiaal binnen en buiten de bol m.b.v. de multipool-ontwikkeling.

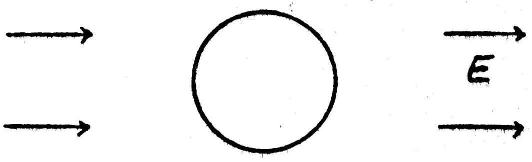
(Ga ook nog eens na hoe u aan de multipool-ontwikkeling komt).

b Ga na dat, voor de potentiaal buiten de bol, dit probleem hetzelfde is als dat van een homogeen gepolariseerde bol (met polarisatie-dichtheid $\vec{P} = (0,0,\sigma_o)$. Een homogeen over het volume verdeelde polarisatie-lading kan dus vervangen worden door een oppervlakte-ladingsdichtheid $\sigma_o \cos \Theta$.

[aanwijzing: zie evt. pag.56 van het college-diktaat] .

Opgave 7

Een geïsoleerde ongeladen geleidende bol (straal a) bevindt zich in een homogeen elektrisch veld E. (zie fig.). In ieder punt is het elektrisch veld gelijk aan E +(bijdrage van op de bol geïnduceerde lading). We nemen aan dat de ladingen die E veroorzaken zo ver weg zijn dat ze niet door de geïnduceerde lading worden beïnvloed.



a Bereken het elektrische veld binnen en buiten de bol. [Kies een bij de symmetrie passend orthonormaal stelsel functies; het is handiger de radiële en tangentiële component van het veld te berekenen, dan de cartesische componenten] .

b Bereken de geïnduceerde lading die op het oppervlak van de bol verschijnt.

Opgave 8.

We bekijken de volgende configuraties:

1. In de oorsprong van een coördinatenstelsel xyz een puntlading $-2q$. Op de z-as in $z = +z_o$ een puntlading $+q$, evenzo in $z = -z_o$ (zie fig. 1.)
2. Twee concentrische cirkels in het xy-vlak van een coördinatenstelsel xyz, respectievelijk met straal a en b ($a > b$); beide zijn uniform geladen: totale lading resp. $+q$ en $-q$ (zie fig. 2)

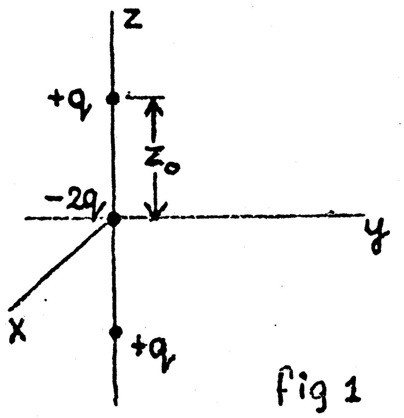


fig 1

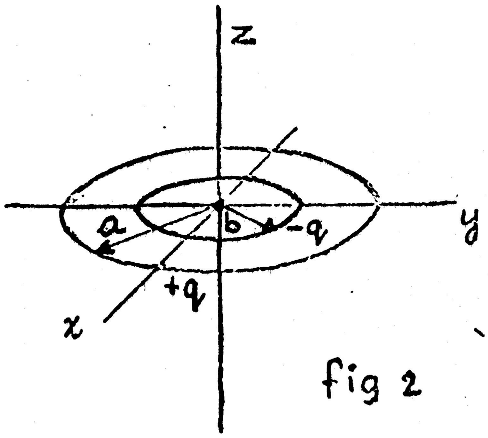


fig 2

a Schrijf voor beide configuraties de multipool-ontwikkeling op van de elektrostatische potentiaal $\varphi(\vec{r})$ voor $|\vec{r}| > z_o$ resp. $|\vec{r}| > a$. Hoe groot zijn de multipoolmomenten φ_ℓ ?

b Als φ_ℓ voor $\ell > 2$ wordt verwaarloosd, hoe luidt dan de benaderde uitdrukking voor de potentiaal in beide gevallen ($|\vec{r}| > z_o$ resp. $|\vec{r}| > a$)?

c Wat is de exacte uitdrukking voor $\varphi(\vec{r})$ in het xy-vlak van configuratie 1; vergelijk deze exacte uitdrukking met het resultaat van b door naar een geschikte parameter te ontwikkelen.

d Hoe groot moet z_o gekozen worden opdat monopool-dipool- en quadrupool-gedeelte van de elektrostatische potentiaal van configuratie 1 identiek zijn aan de overeenkomstige gedeelten van de potentiaal van configuratie 2?

Opgave 9

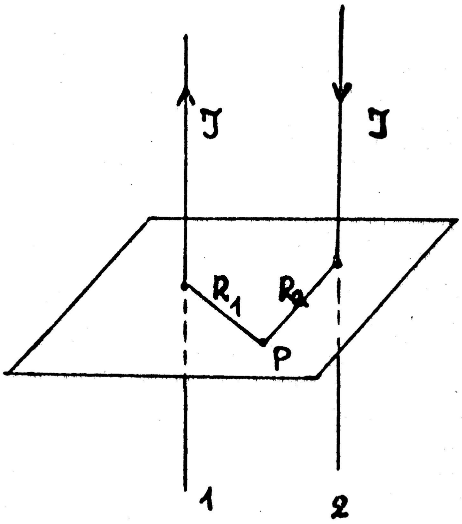
Bereken het magnetisch veld van een oneindig lange rechte draad waardoor een stroom J loopt, in een willekeurig punt

a met de wet van Maxwell in integrale vorm.

b met de wet van Biot en Savart.

c waarom kan de vectorpotentiaal niet uit $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{J}{c}\int \frac{d\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ berekend worden?

Opgave 10

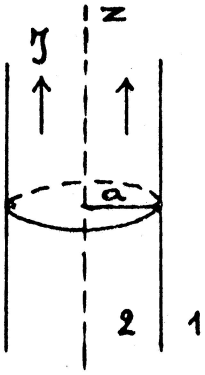


Door twee evenwijdige oneindig lange rechte draden lopen gelijke maar tegengesteld gerichte stromen J. Bereken het magneetveld in een willekeurig punt P. Kunt u ook laten zien waarom we nu (in tegenstelling tot 9c) wel gebruik kunnen maken van

$$\sum_i \vec{A}_i(\vec{r}) = \sum_i \frac{J}{c}\int \frac{d\vec{s}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (i = 1,2) \text{ ?}$$

Opgave 11

We berekenen het magnetisch veld van een oneindig lange cylindrische draad (straal a), waardoor een uniforme stroom J loopt, binnen en buiten de draad uit de vectorpotentiaal.



[Natuurlijk kan het veld door de aanwezige symmetrie (toevallig) eenvoudiger uit de wet van Maxwell worden gevonden].

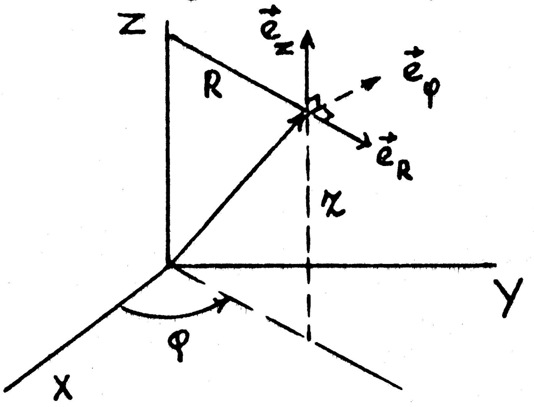
a Aan welke differentiaalvglk. voldoet $\vec{A}$ respectievelijk buiten (1) en binnen (2) de draad?

b Laat zien dat $\vec{A}$ alleen afhangt van de afstand R tot de centrale lijn (z-as) van de draad. Schrijf de op te lossen differentiaalvgl. in geschikte coördinaten.

c Los de vgl. voor de vectorpotentiaal op. De differentiaalvgl. voor binnen de draad is inhomogeen; u kunt gemakkelijk een particuliere oplossing vinden, en vervolgens de algemene oplossing door daarbij de algemene oplossing van de homogene vergelijking op te tellen.

Opgave 11 (vervolg)

d Vind de constanten in de oplossingen binnen en buiten de draad door ze op het oppervlak aan te sluiten (welke grootheden dienen op het oppervlak continu te zijn?) Bedenk verder dat de vectorpotentiaal op de z-as niet mag divergeren. Bereken vervolgens ook het magnetisch veld.



[Gebruik: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} =$

$$= \left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_R + $$

$$+ \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{R}\frac{\partial (RA_\varphi)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z ,$$

maar bedenk dat hierin heel wat termen nul zijn!]

Opgave 12

Een homogeen geladen bol (straal a, ladingsdichtheid ρ) roteert met constante hoeksnelheid ω om een as.

We berekenen eerst het magneetveld in een willekeurig punt P buiten de bol uit de vektorpotentiaal:

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\, d\vec{r}_2$$

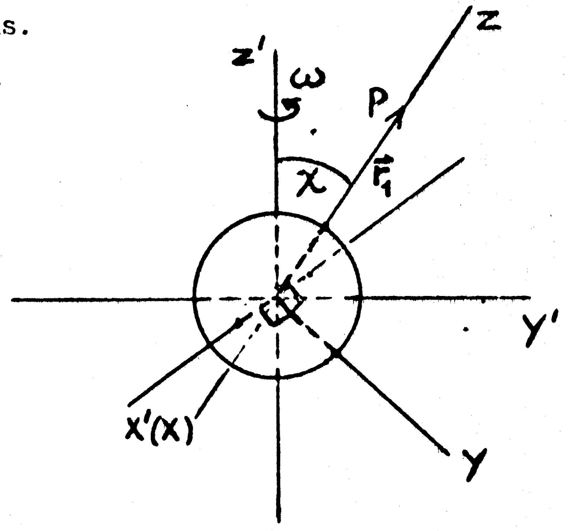


fig 1

a Kunt u bij voorbaat al zeggen van welke variabelen het magneetveld in P afhangt?

b Wat is de stroomdichtheid

$\vec{J}'(\vec{r}) \equiv \left(J_{x'}(\vec{r}),\ J_{y'}(\vec{r}),\ J_{z'}(\vec{r})\right)$.

c We gaan nu op nieuwe coördinaten xyz over (zie figuur 1). Hoe hangen deze met de oude coördinaten x',y',z' samen?

Wat is dan $\vec{J}(\vec{r}) \equiv \left(J_x(\vec{r}),\ J_y(\vec{r}),\ J_z(\vec{r})\right)$.

d In het x y z stelsel kiezen we bolcoördinaten op de gebruikelijke manier ($x = r\sin\Theta\cos\varphi$, $y = r\sin\Theta\sin\varphi$, $z = r\cos\Theta$).

Bereken nu: $\vec{A}(\vec{r}_1) = \left(A_x(\vec{r}_1),\ A_y(\vec{r}_1),\ A_z(\vec{r}_1)\right)$

[Als u het antwoord uitdrukt in de componenten van $\vec{A}$ t.a.v. de eenheidsvectoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\chi$ (zie fig. 2) vindt u:

$$A_\varphi = \frac{4\pi}{15}\frac{\rho\omega}{c}\sin\chi\,\frac{a^5}{r_1^2}$$

$$A_\chi = A_r = 0.$$

Waarom kon apriori worden verwacht dat

$A_\varphi \neq 0,\ A_\chi = A_r = 0$?].

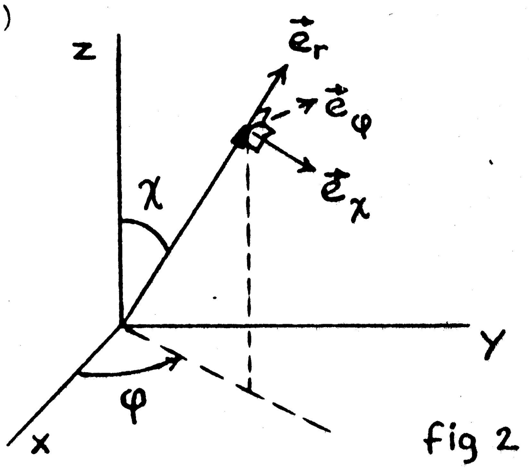


fig 2

e Bereken nu het magneetveld in P.

[U zou in een willekeurig boek over vectoranalyse eens na moeten zoeken of de volgende formule goed is over geschreven:

Opgave 12 (vervolg)

$$\text{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r\sin\chi}\left[\frac{\partial}{\partial\chi}(\sin\chi\; v_\varphi) - \frac{\partial v_\chi}{\partial\varphi}\right]\vec{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{e}_\chi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\chi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\chi}\right]\vec{e}_\varphi\;\Big].$$

f Bereken ook het magneetveld binnen de bol. [Aanwijzing: probeer zoveel mogelijk te profiteren van het werk dat u al gedaan heeft.]

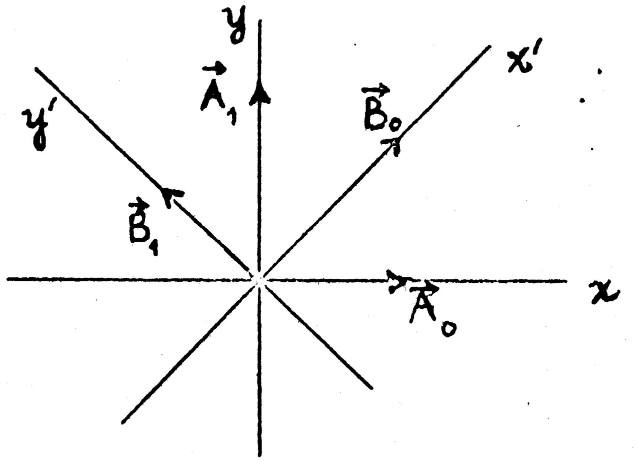
X Opgave 13.

Werkcollege Maxwell-theorie 1975

Langs de z-as planten zich twee lineair gepolariseerde vlakke monochromatische golven met dezelfde frequentie voort (golfvector $\vec{k}$, frequentie ω). De golven zijn respectievelijk langs de x- en y-as gepolariseerd, hun amplituden zijn resp. a en b, zij vertonen een faseverschil φ t.o.v. elkaar.

De resulterende amplitude $\vec{A}$ is:

$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 = a\hat{x} + be^{i\varphi}\hat{y}$



a We zoeken een nieuw beginpunt α voor de fase zodanig dat we in twee onderling loodrechte richtingen trillingen krijgen met faseverschil $\pi/2$. Daartoe voeren we de nieuwe amplitude $\vec{B}$ in: $\vec{B} = \vec{A}e^{-i\alpha} = \vec{B}_0 - i\vec{B}_1$ met $\vec{B}_0$ en $\vec{B}_1$ reëel en $\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1 = 0$. Geef hiervoor een argumentatie. Druk α uit in het gegeven faseverschil φ van beide golven en vind uitdrukkingen voor $\vec{B}_0(\alpha,\ )$ en $\vec{B}_1(\alpha,\ )$.

b We kiezen nu een X'-as // $\vec{B}_0$ en een Y'-as // $\vec{B}_1$. Laat zien dat het $\vec{E}$-veld in het X'Y'-stelsel gegeven wordt door:

$$E_{x'}(\vec{r},t) = E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$E_{y'}(\vec{r},t) = E_1 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Bereken E_0 en E_1.

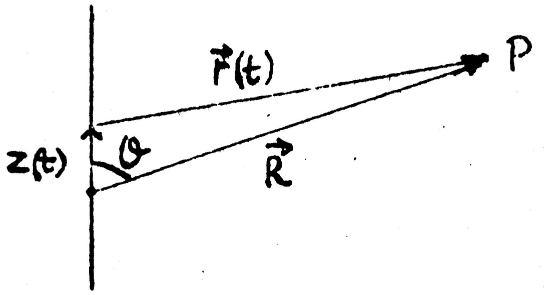
c Hoe is nu i.h.a. de resulterende golf gepolariseerd?

d Stel a = b. Ga eens na hoe de resulterende golf gepolariseerd is voor de volgende waarden van het faseverschil φ:

$\varphi = 0$, $\varphi = +\pi/2$ $\varphi = -\pi/2$.

Opgave 14

We bekijken het stralingsveld van een puntlading e die harmonisch langs de z-as trilt (kleine amplitude a; frequentie ω). r is de afstand van de bewegende puntlading tot het waarnemingspunt P; R de vaste afstand van de oorsprong tot P.



Opgave 14 (vervolg)

De geretardeerde potentialen $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$ van de puntlading in punt P op tijdstip t zijn (zie toelichting):

$$\varphi(P,t) = \frac{e}{\left[r(t_{ret})\left(1 - \frac{v_r(t_{ret})}{c}\right)\right]} \; ; \; \vec{A}(P,t) = \frac{e}{c}\,\frac{\vec{v}(t_{ret})}{r(t_{ret})\left[1 - \frac{v_r(t_{ret})}{c}\right]}$$

v_r is de component van $\vec{v}$ in de richting van $\vec{r}$. De geretardeerde tijd t_{ret} voldoet aan: $t - t_{ret} = \frac{|\vec{r}(t_{ret})|}{c}$

a de snelheid van de oscillator is niet relativistisch $|v| \ll c$; geef benaderde uitdrukkingen voor $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$. Het gebiedje waarin de oscillator beweegt is klein: $z(t) \ll |\vec{R}|$; maak in de uitdrukking $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$ de dipoolbenadering.

b Bereken $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$; $p \equiv ea$ is het dipoolmoment; termen van orde p^2 worden verwaarloosd.

c Bereken $\vec{E}(P,t)$ en $\vec{B}(P,t)$ van het stralingsveld.

d Wat is het tijdgemiddelde van de energiestroom in de richting Θ, en de totale uitgestraalde energie per seconde?

Toelichting: $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$ kunnen berekend worden uit de uitdrukkingen (16) en (17) op pag. 33 en 34 van het dictaat. Daartoe worden de integralen op pag. 37 uitgerekend:

$$\varphi(\vec{r},t) = e\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'\;\delta\left(t-t' - \frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')}$$

$$R(t') = |\vec{r} - \vec{q}(t')|$$

$$\vec{A}(r,t) = \frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\;\frac{\dot{\vec{q}}(t')\;\delta\left(t-t'-\frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')}$$

Om deze integralen te berekenen gebruiken we de volgende stelling: laat x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ de nulpunten zijn van $g: g(x_i) = 0$, dan is

Opgave 14 (vervolg)

$$\int f(x)\, \delta(g(x))\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\left|\frac{dg(x)}{dg}\right|_{x=x_i}}$$

Hiermee vindt men onmiddellijk $\varphi(P,t)$ en $\vec{A}(P,t)$, de z.g. potentialen van Wiechert en Liénard.

Opgave 15

Een lange cilindervormige geleider met straal R heeft een ladingsdichtheid λ . Parallel aan de cilinder bevindt zich op een afstand d van het middelpunt van de cilinder een oneindige geleidende plaat.
Wat is de potentiaal rechts van de plaat maar buiten de cilinder?

Straling van een versnelde lading

Opgave 16

Een elektron (m,e) beweegt zich in een vlak loodrecht op een homogeen magneetveld $\vec{B}$.

a Leid af welke baan $\vec{q}(t)$ het elektron beschrijft (kies de z-as langs $\vec{B}$.)

b Geef niet-relativistische uitdrukkingen voor het door het deeltje uitgestraalde $\vec{E}$- en $\vec{B}$-veld op grote afstand. [aanw. gebruik de dipoolbenadering (zie pag. 40 diktaat), en neem de retardatie t.o.v. het middelpunt M van de cirkel].

c Geef een uitdrukking voor de elektromagnetische energie die per seconde stroomt door oppervlak dO op afstand r van M, opgespannen door ruimtehoek $d\Omega$ (θ,φ).

d Bereken de totale per seconde uitgestraalde energie.

Opgave 17

In de vorige opgave hebben we berekend dat een elektron dat eenparig een cirkel doorloopt (straal a) in een tijdje dt de volgende hoeveelheid energie verliest (in dipoolbenadering; niet-relativistisch):

$$dW = -\frac{2e^2}{3c^3} a^2 \omega^4 \, dt .$$

We bekijken nu het Rutherford-model voor het waterstofatoom: het elektron beschrijft een cirkelbaan, straal a_o (1° Bohr-baan), constante ω, in één vlak met het proton als middelpunt. Zoals u weet, is de onhoudbaarheid van dit atoom-model een belangrijke toetssteen voor de klassieke theorie geweest. Er waren immers goede indicaties dat een atoom eruit ziet zoals Rutherford dacht (verstrooiingsexperimenten); anderzijds is zo'n atoom volgens de klassieke theorie instabiel: immers het elektron voert een versnelde beweging uit, straalt dus, en verliest daardoor energie. Laten we aannemen dat het zich spiraalsgewijs naar het proton toe beweegt in het vlak van de oorspronkelijke cirkelbaan. We willen nu de grootte-orde berekenen van de levensduur van een Rutherford-waterstofatoom.

a We nemen aan dat het elektron per omloop weinig energie verliest vgl. met zijn totale energie.

Laat zien dat:

$$E(t) = -\frac{e^2}{2a(t)}$$

(E(t) is de energie van het elektron op tijdstip t, a(t) de straal van de momentane cirkelbaan).

Opgave 17 (vervolg)

b Leid af dat: $\frac{da}{dt} = \frac{dW}{dt} \Big/ \frac{dE}{da}$

c Bereken nu de karakteristieke tijd T waarin a(t) de waarde $a(T) \simeq 0$ heeft bereikt.

[Aanw.: druk ω in e,m en a(t) uit.

Opm.: we moeten nemen $r_o \ll a(T) \ll a_o$ ($r_o = \frac{e^2}{mc^2}$ is de klassieke straal van het elektron) opdat het klassiek elektromagnetisme goed is. Natuurlijk kan het elektron in dit model oneindig veel energie verliezen; we zijn tevreden met een karakteristieke tijd T waarin het elektron in de buurt van proton ($r_o \ll a(T) \ll a_o$) terecht is gekomen.]

Relativiteits-theorie

Opgave 18

Een deeltje met rustmassa m, lading e, bevindt zich in een homogeen elektrostatisch veld $\vec{E} = (E,0,0)$. Op $t = 0$ is het deeltje in de oorsprong van het coördinatenstelsel met snelheid $\vec{v} = 0$.

a Hoe luidt de relativistische bewegingsvergelijking voor het deeltje?

b Bepaal hieruit de snelheid v als functie van t. Voor $t \to \infty$ nadert v tot c; geef voor grote t de eerste correctie op $c - v$.

c Integreer nogmaals en bepaal zo de plaats van het deeltje als functie van t. Wat wordt dat in de niet relativistische limiet?

Opgave 19

Een dipool $\vec{p} = (p,0,0)$ beweegt zich met constante snelheid v langs de x-as van een coordinatenstelsel S [op $t = 0$ bevindt de dipool zich in de oorsprong van het systeem S].

a Bereken de potentialen en het elektro-magnetisch veld voor een waarnemer die met dezelfde snelheid beweegt als de dipool.

b Bereken de potentialen en het elektromagnetisch veld voor een waarnemer in rust in S.

c Zendt de dipool straling uit volgens de waarnemer in S?

Elektromagnetisch veld in media

Opgave 20

Een ongeladen, geïsoleerde, diëlektrische bol (straal a; diëlektrische constante ϵ) bevindt zich in een homogeen elektrisch veld $\vec{E}$.

a Bereken de potentiaal binnen en buiten de bol.
[aanw.: gebruik een ontwikkeling naar geschikte orthonormale functies, en let op de randvoorwaarden.]

b Hoe ziet het elektrisch veld binnen de bol eruit?

c Vgl. deze opgave met opgave 8. Wat maakt het resultaat zo verschillend?

Opgave 21

Een puntlading q bevindt zich op afstand d van de vlakke begrenzing van een halfruimte gevuld met diëlektricum (geïsoleerd; diël. constante ϵ). Bereken het $\vec{E}$-veld in de hele ruimte.

Opgave 22

De ruimte is gevuld met een oneindig uitgestrekt diëlektricum (diël.cst.ϵ), waarin een bolvormige holte met straal R is uitgespaard. In het middelpunt van de bol staat een (punt)-dipool met sterkte $\vec{p}$.

a Bereken de potentiaal in de hele ruimte.
[Aanw.: neem de z-as langs $\vec{p}$ en ontwikkel naar aan de symmetrie aangepaste functies].

b Hoe ziet het $\vec{E}$-veld in de uitsparing eruit?

c Controleer of uw antwoord overeenstemt met wat u in de limiet voor $\epsilon \to 1$ zou verwachten.

Opgave 23

We bekijken een plasma bestaande uit N ionen (massa M, lading +e) en N elektronen (massa m, lading -e). We behandelen zo'n plasma als een diëlektrisch medium, waarin de verplaatsing van de elektronen verantwoordelijk is voor de polarisatie; met andere woorden, we proberen het plasma (voor

Opgave 23 (vervolg)

zover het elektromagnetische eigenschappen betreft) te beschrijven met een diëlektrische "constante" $\epsilon(\omega)$.

a eerst een eenvoudig model: de ionen zijn vastgeprikt, de elektronen kunnen zich t.o.v. de ionen vrij bewegen, en zijn in evenwicht in rust. We leggen nu een oscillerend elektrisch veld aan:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Wat is de bewegingsvgl. voor de elektronen? [vgl. pag. 42 diktaat, waar we een (harmonisch) gebonden elektron in een atoom bekeken hebben]. Zoek een oplossing waarbij de uitwijking van een elektron klein is (welke benadering mag u dan maken?).

De polarisatie per vol. eenheid is $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$.

Laat zien dat: $\vec{P}_\omega(\vec{r}) = -\frac{n_e e^2}{m\omega^2}\vec{E}_\omega(\vec{r})$ (n_e is de dichtheid van elektronen). U heeft nu dus (waarom?) een diëlektrische "constante" $\epsilon(\omega)$ voor het plasma gevonden.

b vervolgens maken we het model realistischer: ook de ionen kunnen nu bewegen (maar we bekijken alleen oplossingen met kleine uitwijkingen). Bovendien leggen we een constant uitwendig magneetveld $\vec{B}_o$ aan. Ga na dat we de volgende bewegingsvergelijkingen krijgen voor resp. 'n elektron en 'n ion:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= -e\vec{E}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} - \frac{e}{c}\dot{\vec{r}}\wedge\vec{B}_o \\ M\ddot{\vec{R}} &= e\vec{E}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}\dot{\vec{R}}\wedge\vec{B}_o \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Elektronen en ionen wisselwerken dus dmv. het e.m-veld; zonder dat veld bewegen zij vrij t.o.v. elkaar.

Zoek oplossingen van het type: $\vec{r} = \vec{r}_o e^{-i\omega t}$; $\vec{R} = \vec{R}_o e^{-i\omega t}$.

[Aanwijzing: kies de z-as langs B_o, verwaarloos m, $\frac{1}{M}$, $\frac{m}{M}$ t.o.v. respectievelijk M, $\frac{1}{m}$ en 1. Voer coördinaten $r_{o,\pm 1} \equiv \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(r_{ox} \pm i r_{oy})$ en $R_{o,\pm 1} \equiv \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(R_{ox} \pm R_{oy})$ in.]

Nu heeft u $s_{\pm,z} \equiv (R_o - r_o)_{\pm,z}$ als functie van $\vec{E}_\omega(\vec{r})$, ω, $\Omega_B \equiv \frac{eB_o}{Mc}$, $\omega_B \equiv \frac{eB_o}{mc}$ en $\omega_p = e\sqrt{\frac{4\pi N}{m}}$ gevonden. Laat zien dat u de polariseerbaarheid $\vec{P}(\vec{r},t)$ heeft gevonden, doordat $s_\pm$ en s_z bekend zijn.

Opgave 23 (vervolg)

Leid nu voor de diëlektrische "constante" af:

$$\epsilon_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega \pm \omega_B - \frac{\omega_B\Omega_B}{\omega}\right)}$$

$$\epsilon_z(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} .$$

U ziet dus dat u het plasma nu niet meer m.b.v. één functie van ω kunt beschrijven, maar dat u er drie nodig heeft. Wat gebeurt er als de frequentie van het $\vec{E}$-veld veel groter is dan de karakteristieke frequentie van de ionen: $\omega \gg \Omega_B$? (Als u ook nog $B_0 = 0$ neemt krijgt u het resultaat van opgave a terug).

c Tenslotte zouden we nog botsingen tussen ionen en elektronen in rekening kunnen brengen; we doen dit door een fenomenologische "wrijvingskracht" toe te voegen in de bewegingsvglkn
[$-m\gamma\ (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}})$ resp. $-M\gamma\ (\dot{\vec{R}} - \dot{\vec{r}})$; γ is een wrijvings-constante.] Het is te verwachten dat zo'n wrijvingsterm aanleiding tot dissipatie van energie geeft. Laat zien dat de diëlektrische "constante" inderdaad complex wordt.
[aanwijzing: U hoeft alleen geringe modificaties in de berekening onder b aan te brengen. Men vindt bv.

$$\epsilon_z(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad].$$

Opgave 24

Bekijk een zeer lange buis met rechthoekige doorsnede en ideaal geleidende wanden, gevuld met een diëlektricum (diëlektrische constante ϵ, permeabiliteit μ). Zo'n buis heet golfgeleider (wave guide). Sluiten we hem aan beide zijden af, dan krijgen we een trilholte (resonant - cavity).

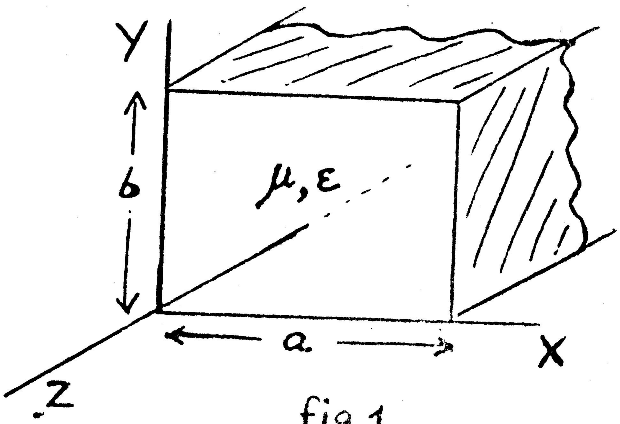


fig 1

Opgave 24 (vervolg)

a Wat zijn de Maxwell-vglkn. in de buis? [neem voor de tijdafhankelijkheid van $\vec{E}$- en $\vec{B}$-veld $e^{-i\omega t}$]

b Wegens de cylindrische geometrie zoeken we oplossingen van het type:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y)\; e^{\pm ikz\; -\; i\omega t} \qquad (1a)$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \vec{B}(x,y)\; e^{\pm ikz\; -\; i\omega t} \qquad (1b)$$

k is voorlopig een nog onbekende complexe parameter. Door geschikte lineaire combinaties van bovenstaande oplossingen te nemen kan men elke gewenste lopende of staande golf maken.

Leid nu uit de Maxwell-vglkn de golfvglkn voor $\vec{E}$ en $\vec{B}$ af:

$$\left[\Delta_t + \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$\Delta_t \equiv \Delta - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ m.a.w. het transversale deel van de Laplace-operator.

(We gebruiken het woord transversaal in een andere betekenis dan die in hoofdstuk I van het diktaat.)

c We splitsen $\vec{E}$- en $\vec{B}$-veld in een transversaal en longitudinaal stuk:

$\vec{E}_t = \left(\vec{z} \wedge \vec{E}\right) \wedge \vec{z}$ en idem voor $\vec{B}$;

$\vec{E}_z = \left(\vec{z} \cdot \vec{E}\right) \vec{z}$ $\qquad \vec{z} \equiv (0,0,1)$

Ga na dat de volgende velden een oplossing van de Maxwell-vglkn zijn:

B_z oplossing van:

$$\left(\Delta_t + \gamma^2\right) B_z = 0 \qquad \gamma^2 \equiv \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \qquad (3)$$

$$\vec{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2}\, \text{grad}_t\, B_z \qquad \text{grad}_t \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

$$\vec{E}_t = -\frac{\omega}{ck}\, \vec{z} \wedge \vec{B}_t \qquad (5)$$

$$E_z = 0 \qquad (6)$$

[Aanwijzing: doe dit door substitutie van (3) t/m (6) in de Maxwell-vglkn.; gebruik o.a.:

$\text{rot}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{b}\cdot\text{grad})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\text{grad})\,\vec{b} + \vec{a}\,\text{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\text{div}\,\vec{a}$.

Opmerking: deze oplossing heet transversaal elektrisch (TE) ($E_z = 0$). Natuurlijk dient ze uit de Maxwell-vglkn gevonden te worden (zie bv. Jackson); we hebben dit programma overgeslagen om het verhaal te bekorten].

Opgave 24 (vervolg)

d De wanden van de buis waren ideaal geleidend. Wat is de randvoorwaarde voor de TE-oplossing?

e Bepaal nu de TE-oplossing voor de golfgeleider in fig. 1.
[Aanw.: vgl. (3) heeft slechts voor bepaalde waarden van γ oplossingen die aan de randvwd. voldoen; gegeven zekere γ, wordt k imaginair voor frequenties $\omega < \omega_{min}$. Bepaal ω_{min} voor gegeven γ. Oplossingen met $\omega < \omega_{min}$ kunnen zich niet door de buis voortplanten (waarom niet?). Bepaal nu voor a > b (zie fig.1) de laagste ω_{min}, en schrijf de velden van de oplossing $TE_{1,0}$ expliciet op. Wat $TE_{1,0}$ betekent zal u duidelijk zijn zodra u op dit punt in de berekening bent aangeland].

Opgave 25

We bekijken de brekingsindex van een verdund gas van harmonische oscillatoren (e, m, ω_o), die bewegen onder invloed van een uitwendig $\vec{E}$-veld: $\vec{E}_o e^{i\omega t}$. We brengen stralingsdemping in rekening. De bewegingsvgl. van zo'n oscillater is dus:

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_o^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_o e^{i\omega t}$$

a Ga na dat een particuliere oplossing, overeenkomend met gedwongen trillingen, is:

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E}_o \frac{e^{i\omega t}}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Waarom kunnen we volstaan met het bekijken van deze oplossing, ipv. de algemene oplossing?
Schrijf $\vec{r}$ als een reële grootheid en beredeneer waarom er geen gewone diëlektrische constante ε bestaat in de zin dat $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.

b De dichtheid van de oscillatoren is N.
Laat zien dat de complexe diëlektrische "constante" $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ wordt:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \frac{1}{\omega_o^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Met $\vec{D} = \tilde{\varepsilon}\,\vec{E}$ worden de Maxwell-vglkn:

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{c}\dot{\vec{E}}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{-1}{c}\dot{\vec{B}} \qquad (\mu = 1)$

met als oplossing: $E_y = e_y\, e^{i\omega(t - \frac{\tilde{n}x}{c})}$

$$B_z = b_z\, e^{i\omega(t - \frac{\tilde{n}x}{c})}$$

Bewijs dat: $\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}$
$\tilde{n}$ is de complexe brekingsindex.

c $\tilde{n} \equiv n - i\kappa$; n is de gewone brekingsindex, κ de extinctie (zie dictaat).

Vind voor 'n verdund gas, een uitdrukking voor $n(\omega)$ in de buurt van ω_o.
Laat aan de hand van een plaatje van $n(\omega) - 1$ zien dat anomale dispersie optreedt.

Werkkollege Maxwelltheorie 22 mei 1975

26 Bij onderstaande opgave moet u van de volgende gegevens gebruik maken.

Twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vgl. van Bessel:

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)\, w = o$$

zijn de Besselfunkties van de eerste soort $J_\nu(z)$ en van de tweede soort $Y_\nu(z)$. Voor deze funkties geldt:

1) voor vaste ν en voor $z \to o$ is:

$$J_\nu(z) \simeq (\tfrac{1}{2}z)^\nu / \Gamma(\nu+1) \quad \nu \neq -1, -2, \ldots$$

$$Y_\nu(z) \simeq -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\, (\tfrac{1}{2}z)^{-\nu} \quad \nu > o$$

2) voor vaste ν en voor $z \to \infty$ is:

$$J_\nu(z) \simeq \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\,(z - \tfrac{1}{2}\pi\nu - \tfrac{1}{4}\pi)$$

$$Y_\nu(z) \simeq \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\,(z - \tfrac{1}{2}\pi\nu - \tfrac{1}{4}\pi)$$

3) $J'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z)$

$$Y'_\nu(z) = \frac{\nu}{z} Y_\nu(z) - Y_{\nu+1}(z)$$

4) $J_\nu(z) = \dfrac{2(\frac{1}{2}z)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin zt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}\, dt$

$$Y_\nu(z) = \frac{-2(\frac{1}{2}z)^{-\nu}}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int_1^\infty \frac{\cos zt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}\, dt$$

voor: $\nu < \frac{1}{2}$, $z > o$

$$J_o(z) = \frac{1}{\pi}\int_o^\pi \cos\,(z \cos\phi)\, d\phi$$

Opgave 26

Gegeven is een oneindig lange draad, zonder dikte, waarin een stroom loopt:

$$I = I_o \, . \cos \omega t$$

a) Bereken (m.b.v. 4) de vectorpotentiaal van de draad en bereken vervolgens (m.b.v. 3) de velden $\vec{E}(\vec{r},t)$ en $\vec{B}(\vec{r},t)$.

In een eerder gemaakt vraagstuk (opgave 9) bleek dat de vectorpotentiaal van een oneindig lange draad divergeerde.

b) Waarom bestaat de vectorpotentiaal in dit geval wel?

We nemen in de uitdrukking Voor $\vec{B}(\vec{r},t)$ de limiet $\omega \to o$.

c) Ga na (m.b.v. 1) dat dan de juiste uitdrukking voor het statische magneetveld ontstaat.

Vervolgens berekenen we nog de energie, die wordt geëmitteerd.

d) Bereken de vector van Poynting uit de uitdrukkingen voor $\vec{E}(\vec{r},t)$ en $\vec{B}(\vec{r},t)$ en bereken het tijdsgemiddelde hiervan. Gebruik vervolgens de asymptotische uitdrukkingen voor J_ν en Y_ν om de straling te berekenen die p.e.v. tijd door een cilinder met straal R en hoogte $\Delta z = 1$ in de limiet $R \to \infty$ wordt geëmitteerd.

Vervolgens plaatsen we de stroomdraad op een afstand d evenwijdig aan een oneindig goed geleidende halfruimte.

e) Hoe zien de velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ eruit in deze halfruimte (voor het magneetveld hoeft u alleen het tijdsgedrag te geven)?

f) Aan welke randvoorwaarden moeten de velden voldoen op het scheidingsvlak met de halfruimte?

De oplossing van de golfvergelijking buiten de geleider bestaat uit een particuliere oplossing, die u al heeft, plus een oplossing van de homogene golfvergelijking, die zo wordt gekozen dat is voldaan aan de randvoorwaarden.

g) Geeft de oplossing van de homogene golfvergelijking voor deze configuratie.

(Vervolg opgave 26)

Ook nu gaan we weer de straling berekenen.

h) Bereken (m.b.v. 2) de stralingsvelden (bedenk dat u alleen velden hoeft mee te nemen, die zich als $R^{-1/2}$ gedragen). Bereken de vector van Poynting.

Aan de stralingsvelden kunt u duidelijk zien dat er iets bijzonders aan de hand is, wanneer:

$$\frac{\omega}{c} d = k\ d$$

aan bepaalde voorwaarden voldoet:

i) Teken het emissiepatroon voor het geval dat $k\ d = \pi$.

j) Bereken de totale (tijdsgemiddelde) energie die p.e.v. tijd door een cilinder met hoogte $\Delta z = 1$ wordt geëmitteerd. Is deze groter of kleiner dan onder d)?

We bekijken nu nog het geval $k\, d \ll 1$.

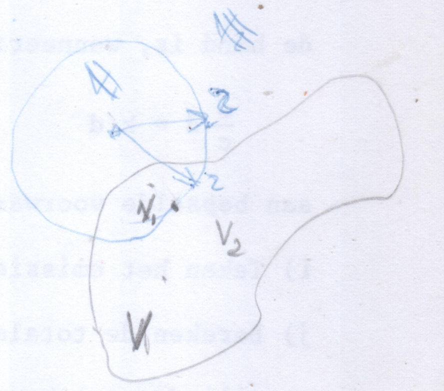
k) Waarom moet in dit geval de uitkomst in j) zeker kleiner zijn dan in d)?

(27) gegeven $\vec{j}(\vec{r}')$ binnen V.

gevraagd multipoolontwikkeling opstellen voor $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int_V \frac{d\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

voor willekeurige r.

Verdeel V in V_1 en V_2 waarvoor



$r' < r$ voor $\vec{r}' \in V_1$

$r' > r$ " $\vec{r}' \in V_2$

(a) Schrijf op multipoolontwikkeling voor vectorpotentiaal $\forall\, \vec{r}' \in V_1$ gebruik additietheorema

(b) Idem voor $\vec{r}' \in V_2$.

(c) Welk opvallend verschil tussen dit en formule (10) op pag 19. Preciseer! Waardoor verschil?

Bekijk nu nog bijdragen van $l=0$ en $l=1$ in $\vec{r}$ buiten V.

(d) Laat zien dat voor $l=0$: $\vec{A}_0 = \vec{0}$
en voor de bijdrage van $l=1$:

$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

waarin $\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d\vec{r}'\,\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$

Aanwijzing gebruik dat voor stationaire stroomverdeling

$$\vec{\nabla}\cdot(r_\alpha \vec{j}) = j_\alpha$$ en bewijs

dat $\int d\vec{r}'\, j_\alpha r'_\beta = -\int d\vec{r}'\, j_\beta r'_\alpha$